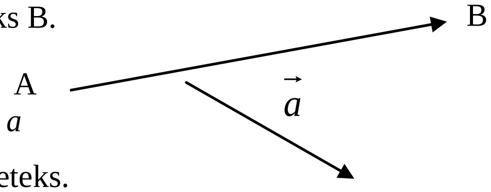
KORDAMINE RIIGIEKSAMIKS VII teema

Vektor. Joone võrrandid.

1. **Vektoriaalseid suuruseid iseloomustavad**
   a) **siht**
   b) **suund**
   c) **pikkus**
2. Vektoriks nimetatakse suunatud sirglõiku.
3. Vektori $\overrightarrow{AB}$ alguspunktiks on A ja lõpp-punktiks B.



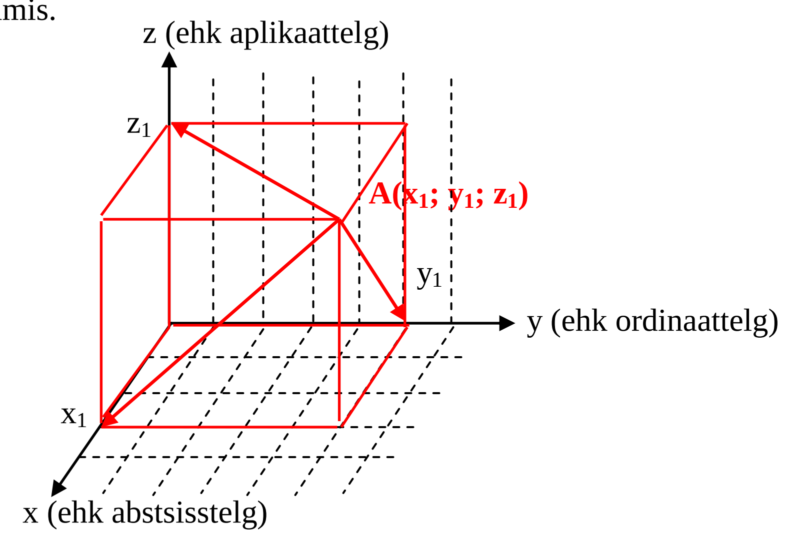
4. Vektorit võib tähistada ka väiketähega, näiteks $\vec{a}$
5. Paralleelseid vektoreid nimetatakse kollineaarseteks.
6. Samasihilised vektorid on kas samasuunalised ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$) või vastassuunalised ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$).
7. **Kaks vektorit on võrdsed, kui nad on**
   a) **kollineaarsed**
   b) **samasuunalised**
   c) **võrdse pikkusega.**

11) Vektori, mille alguspunkt on A(x_1;y_1;z_1) ja lõpp-punkt B(x_2;y_2;z_2), **koordinaadid leitakse valemiga** $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1)$ **ning pikkus**

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

(s.o. ka kahe punkti vaheline kaugus d).

12) Punkti koordinaadid ruumis.



13) Vektorite $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ **ja** $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ **liitmine või lahutamine**

$\vec{a}\pm\vec{b}=(x_1\pm x_2;y_1\pm y_2;z_1\pm z_2)$.

14) Vektori korrutamine arvuga $k\cdot\vec{a}=(k\cdot x_1;k\cdot y_1;k\cdot z_1)$, kus $k\neq 0$.

Kui k > 0, siis $k \cdot \vec{a}$ on vektoriga $\vec{a}$ samasuunaline;

Kui k < 0, siis $k \cdot \vec{a}$ on vektoriga $\vec{a}$ vastassuunaline.

15) Kaks vektorit $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ **ja** $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ **on kollineaarsed**

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Näide. Kontrollime, kas vektorid $\vec{a} = (6;-2,-18)$ ja $\vec{b} = \left(-4;1\frac{1}{3};12\right)$ on kollineaarsed.

Leiame vastavate koordinaatide suhted $\frac{-4}{6} = \frac{1\frac{1}{3}}{-2} = \frac{12}{-18}$. Kõik need suhted annavad tulemuseks $-\frac{2}{3}$ ja kuna suhted on võrdsed, siis on tegemist kollineaarsete vektoritega.

16) Kahe vektori $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ **ja** $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ **skalaarkorrutis** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, kus φ on nurk nende vektorite vahel või koordinaatides $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$.

Nurk vektorite vahel $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

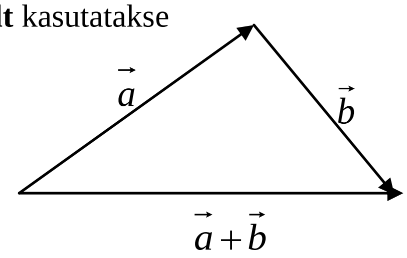
Kahe vektori **ristseisu tunnus** $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$.

Näide. Kontrollime, kas vektorid $\vec{a} = (3;2,-8)$ ja $\vec{b} = (-2;1;-0{,}5)$ on risti.

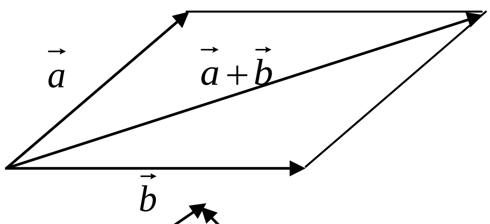
Leiame skalaarkorrutise 3 ·(-2) + 2· 1 + (-8)· (-0,5) = 0, st. vektorid on teineteisega risti.

17) Vektorite liitmiseks geomeetriliselt kasutatakse

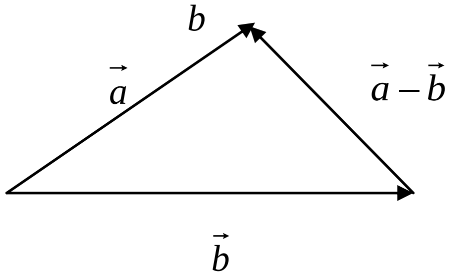
a) kolmnurga reeglit;



b) või rööpküliku reeglit.



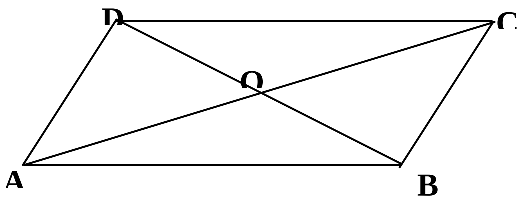
18) Vektorite lahutamine geomeetriliselt



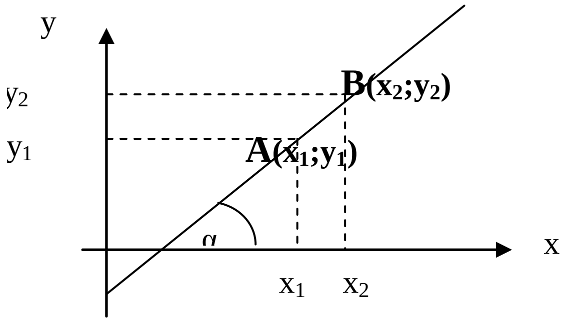
Näide. Leiame jooniselt

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{BO}$



JOONE VÕRRANDID
SIRGE VÕRRANDEID TASANDIL.



Sirge tõusunurgaks nimetatakse nurka x- telje positiivse suuna ja sirge vahel. **Sirge tõusuks** nimetatakse tõusunurga tangensit $k = \tan\alpha = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

a) Punkti ja tõusuga määratud sirge võrrand $y - y_1 = k(x - x_1)$.

Näide. Kirjutame sirge võrrandi, kui sirge läbib punkti A(-3;2) ja tõus k = -5. Saame võrrandi $y - 2 = -5(x + 3)$.

b) Tõusu ja algordinaadiga sirge võrrand $y = kx + b$.

Näide. Kirjutame sirge võrrandi, kui sirge algordinaat b = 2 ja tõus k = 4. Saame võrrandi $y = 4x + 2$.

c) Kahe punktiga määratud sirge võrrand $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Näide. Kirjutame sirge võrrandi, kui sirge läbib punkte A(-3;2) ja B(-4;-1)

Saame võrrandi $\dfrac{x+3}{-4+3} = \dfrac{y-2}{-1-2} \Rightarrow \dfrac{x+3}{-1} = \dfrac{y-2}{-3}$.

d) Sirge võrrand telglõikudes $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

Näide. Kirjutame sirge võrrandi, kui sirge lõikab x-telge punktis (-4;0) ja y-telge punktis (0;3) . Saame võrrandi $\dfrac{x}{-4} + \dfrac{y}{3} = 1$.

e) x-teljega paralleelse sirge võrrand $y = a$.

Näide. Kirjutame x-teljega paralleelse sirge võrrandi, kui sirge läbib punkti K(3;-2). Saame võrrandi $y = -2$.

f) y-teljega paralleelse sirge võrrand $x = b$.

Näide. Kirjutame y-teljega paralleelse sirge võrrandi, kui sirge läbib punkti R(-3;2).

Saame võrrandi $x = -3$.

g) Punkti ja sihivektoriga määratud sirge võrrand $\dfrac{x - x_1}{s_x} = \dfrac{y - y_1}{s_y}$.

Näide. Kirjutame sirge võrrandi, kui sirge läbib punkti A(-5;4) ja sirge sihivektor on $\vec{s}$ = (2;-3). Saame võrrandi $\dfrac{x+5}{2} = \dfrac{y-4}{-3}$.

h) Sirge üldvõrrand $Ax + By + C = 0$.

Näide. Kirjutame sirge võrrandi, kui kordajad on A = -4, B = 1, C = -2

Saame võrrandi $-4x + y - 2 = 0$.

(Ruumis saame analoogilised võrrandid lisades kolmanda koordinaadi z.

Näiteks saame üldvõrrandi $Ax + By + Cz + D = 0$.

Kahe sirge lõikepunkti leidmiseks tuleb lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}.$$

Saadud lahend (x, y) on kahe sirge lõikepunktiks.

Sirgete vastastikused asendid tasandil:

a) Sirged on paralleelsed, kui $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} \neq \frac{C_2}{C_1}$;

b) Sirged ühtivad, kui $\frac{A_2}{A_1} = \frac{B_2}{B_1} = \frac{C_2}{C_1}$;

c) Sirged lõikuvad, kui $\frac{A_2}{A_1} \neq \frac{B_2}{B_1}$

Sirged on risti, kui nende tõusude korrutis $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Tõusude abil saame leida ka **nurga sirgete vahel** $\tan\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$, kus φ on teravnurk antud sirgete vahel.

RINGJOONE VÕRRAND avaldub kujul $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, kus ringjoone keskpunkt on O(a; b) ja raadius r.
Kui ringjoone keskpunkt asub koordinaatide alguspunktis, siis saame võrrandi kujul $x^2 + y^2 = r^2$.

PARABOOLI VÕRRAND – leiad materjalid ruutfunktsiooni graafiku teema alt.

NÄITEÜLESANDED.

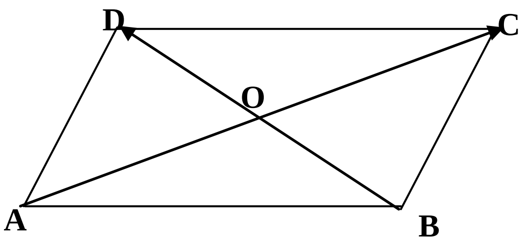
1) **Leia vektori $\overrightarrow{AB}$ koordinaadid, kui tema otspunktid on A(-1;2) ja B(-5;2). Leidke selle vektori pikkus.**

Lahendus. Kasutame valemeid $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ ning $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Saame $\overrightarrow{AB} = (-5+1; 2-2) = (-4; 0)$ ja $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = 4\ (üh)$.

2) **Avalda rööpküliku ABCD diagonaalide $\vec{a} = \overrightarrow{AC}$ ja $\vec{b} = \overrightarrow{BD}$ kaudu vektorid** $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ *ja* $\overrightarrow{DA}$.

Lahendus.



$$\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = -\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right)$$

$\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\vec{b}, \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{a},$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$

$\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right)$

$\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$

Vastus. Saime tulemuseks

$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b}\right), \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right), \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a}\right), \overrightarrow{DA} = -\frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$

3) Põhjenda, kas nelinurk K(-3,1), A(1;4), R(6;2) ja U(-1;-4) on trapets.

Lahendus. Nelinurk on trapets, kui tal on üks paar paralleelseid vastaskülgi. Kontrollime, kas $\overrightarrow{KU} \parallel \overrightarrow{AR}$. Kollineaarsuse tingimusest peavad vektorite koordinaadid olema võrdelised. $\overrightarrow{KU} = (2;-5)$ ja $\overrightarrow{AR} = (5;-2)$. Kuna $\frac{2}{5} \neq \frac{-5}{-2}$, siis vektorid kollineaarsed ei ole. Kontrollime nüüd kas $\overrightarrow{KA} \parallel \overrightarrow{RU}$? $\overrightarrow{KA} = (4;3)$ ja $\overrightarrow{RU} = (-7,-6)$ning $\frac{4}{-7} \neq \frac{3}{-6}$.

Vastus. Kuna nelinurgal puuduvad paralleelsed vastasküljed, siis nelinurk trapets ei ole.

4) Tõesta, et vektor $\vec{n}$ = (2;3) on risti sirgega 2x + 3y = 4.

Lahendus. Anname sirge võrrandile punkti ja sihivektoriga esitatud kuju $\frac{x - x_1}{s_x} = \frac{y - y_1}{s_y}$, kus s_x ja s_y on sirge sihivektori koordinaadid ning x_1 ja x_2 sirgel vabalt võetud punkti koordinaadid.

Teisendame sirge 2x + 3y = 4 võrrandit.

Avaldame 3y = -2x + 4 | :3 $\Rightarrow \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{x - 2}{-\frac{1}{2}}$.

Seega sirge sihivektor on

$\vec{s} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$.

Kontrollimе vektorite ristseisu. Selleks leiame vektorite $\vec{n}$ *ja* $\vec{s}$ skalaarkorrutise

$\vec{n} \cdot \vec{s} = (2;3) \cdot \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot \frac{1}{3} = -1 + 1 = 0$

Kuna skalaarkorrutis on null, siis vektor $\vec{n}$ on risti ka antud sirgega 2x +3y = 4.

Vastus. Vektor $\vec{n}$ risti sirgega 2x +3y = 4.

5) Lõik otspunktidega A(2;4) ja B(-4;6) on ringjoone diameetriks. Leia:

a) ringjoone võrrand;

b) sellele ringjoonele punktis C(3;7) joonestatud puutuja võrrand.

Lahendus.

Ringjoone võrrand avaldub valemiga $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Ringjoone keskpunktiks on lõigu AB keskpunkt. Lõigu keskpunkti koordinaatideks on otspunktide aritmeetilised keskmised. Arvutame ringjoone keskpunkti koordinaadid

$K\left(\frac{2-4}{2};\frac{4+6}{2}\right) \Rightarrow$ K(-1;5).

Ringi raadiuseks võtame näiteks lõigu AK. Leiame punktide A(2; 4) ja K(-1;5) vahelise kauguse AK kasutades valemit $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

Saame raadiuseks r = AK = $\sqrt{(2+1)^2+(4-5)^2}=\sqrt{9+1}=\sqrt{10}$ (*üh*).

Ringjoone võrrand avaldub seega

$(x+1)^2+(y-5)^2=10$

Koostame nüüd raadiuse võrrandi kasutades kahe punkti vahelise sirge võrrandit

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

Raadiuse otspunktid on A(2;4) ja K(-1;5), koostame raadiuseks oleva sirge võrrandi

$\frac{x+1}{3}=\frac{y-5}{-1} \Rightarrow$ - x -1 = 3y –15 $\Rightarrow$3y = - x + 14|:3 $\Rightarrow$y = $-\frac{1}{3}x+4\frac{2}{3}$.

Puutuja ja raadius on puutepunktis risti, st. vastavate sirgete tõusude korrutis $k_1\cdot k_2=-1$.

Kuna vaadeldava sirge tõus on $k_1=-\frac{1}{3} \Rightarrow k_2=3$.

Leiame nüüd puutuja võrrandi kasutades tõusu ja punktiga määratud sirge võrrandit

$y-y_1=k(x-x_1)$.

Saame $y-7=3(x-3) \Rightarrow y=3x-9+7 \Rightarrow y=3x-2$.

Vastus. 1) Ringjoone võrrand on $(x+1)^2+(y-5)^2=10$.

2) Puutuja võrrand on y = 3x – 2.

6) Leida sirgete vastastikune asend. Lõikumise korral leia lõikepunkt.

a) 2x – y – 3 = 0 ja x + 2y – 4 = 0

Lahendus. Kontrollime sirgete paralleelsust. Selleks leiame kordajate suhted $\frac{2}{1}\neq\frac{-1}{2}$.

Seega sirged ei ole paralleelsed ning järelikult nad lõikuvad.

Leiame lõikepunkti koordinaadid. Selleks lahendame võrrandisüsteemi

$\begin{cases}2x-y=3\\x+2y=4\end{cases}$.

Kasutame lahendamiseks näiteks asendusvõtet. Teisest võrrandist $x=4-2y$. Asendades esimesesse võrrandisse saame $2(4-2y)-y=3 \Rightarrow 8-4y-y=3 \Rightarrow -5y=-5 \Rightarrow y=1$.

Leiame muutuja $x=4-2\cdot1=2$.

Lõikepunktiks on $(2;1)$.

Kontrollige saadud lahendit iseseisvalt..

Vastus. Antud sirged lõikuvad ja sirgete lõikepunkt on $(2;1)$.

b) 2x - 3y + 4 = 0 ja 2x - 6y + 5 = 0.

Lahendus. Kontrollime sirgete paralleelsust. Selleks leiame kordajate suhted

$\frac{2}{2}=\frac{-3}{-6}\neq\frac{4}{5}$. Seega antud sirged on paralleelsed.

Vastus. Sirged on paralleelsed.

7) Leia nurk sirgete y = 3x + 1 ja y = 2x – 7 vahel.

Lahendus. Leiame nurga valemist $\tan\varphi = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$.

Esimese sirge tõus $k_1 = 3$ ja teise sirge tõus $k_2 = 2$. Leiame

$\tan\varphi = \left|\frac{3-2}{1+3\cdot 2}\right| = \frac{1}{7} \Rightarrow \varphi = 8^\circ 8'$.

Vastus. Nurk sirgete vahel on $8^\circ 8'$

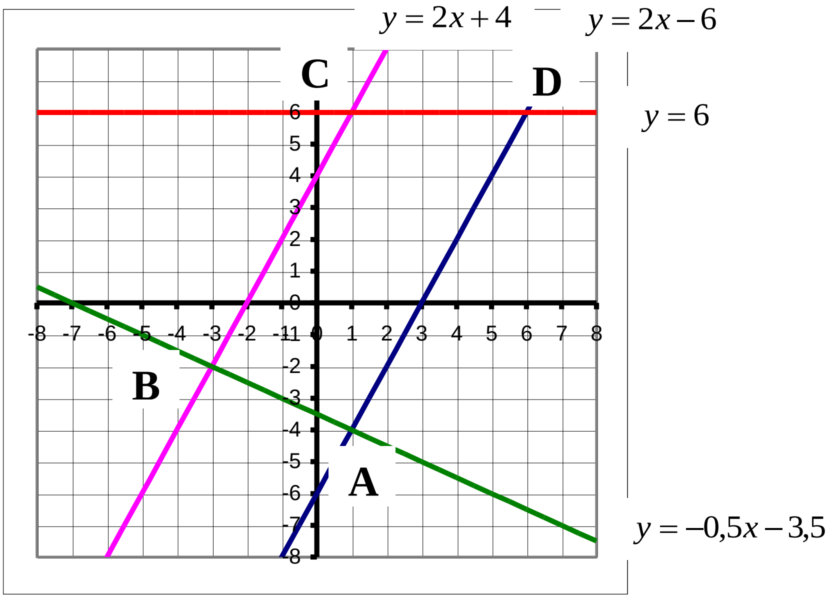
8) *Riigieksam 2003(15p.)* **Tasandil on antud 4 sirget. Esimene neist on antud võrrandiga *y* = 2*x* - 6. Teine on paralleelne esimesega ja läbib punkti *P*(1; 6). Kolmas on risti esimesega ja läbib punkti *Q*(–9; 1). Neljas on paralleelne x-teljega ja läbib punkti *R*(-2; 6). Kolmas sirge lõikab kahte esimest sirget punktis *A* ja teist punktis *B*. Neljas sirge lõikab kahte esimest sirget punktis *D* ja teist punktis *C*. Tehke joonis ja koostage antud sirgete võrrandid.**
Leidke nelinurga ABCD tippude koordinaadid. Arvutage nelinurga ABCD külgede täpsed pikkused ja pindala.

Lahendus.

a) Leiame teise sirge võrrandi. Kuna sirged on paralleelsed, siis nende tõusud on võrdsed ($k_1 = k_2 = 2$) ja koostame punkti ning tõusuga sirge võrrandi.
$y - 6 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x + 4$

b) Kolmas sirge on eelmistega risti, st. sirgete tõusude korrutis on
$k_3 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow 2k_3 = -1$. Seega kolmanda sirge tõus on –0,5. Koostame võrrandi
$y - 1 = -0{,}5(x+9) \Rightarrow y = -0{,}5x - 3{,}5$

c) Neljas sirge on x-teljega paralleelne ja läbib punkti *R*(-2; 6), st. võrrand avaldub kujul y = a. Saame võrrandiks $y = 6$.



d) Leiame nelinurga *ABCD* tippude koordinaadid.
Lahendame võrrandisüsteemid.

1) $\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$

Sellel võrrandisüsteemil lahendid puuduvad (sirged on paralleelsed).

2) $\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = -0{,}5x - 3{,}5 \end{cases}$

$\Rightarrow 2x - 6 = -0{,}5x - 3{,}5 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow A(1;-4)$

3) $\begin{cases} y = -0{,}5x - 3{,}5 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$

$\Rightarrow -0{,}5x - 3{,}5 = 2x + 4 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow B(-3;-2)$

4) $\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = 6 \end{cases}$

$\Rightarrow 2x - 6 = 6 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow D(6;6)$

5) $\begin{cases} y = 6 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$

$\Rightarrow 6 = 2x + 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow C(1;6)$

e) Arvutame nelinurga *ABCD* külgede täpsed pikkused ja pindala.

$AB = \sqrt{(-3-1)^2 + (-2+4)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}(\ddot{u}h)$

$BC = \sqrt{(-3-1)^2 + (-2-6)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}(\ddot{u}h)$

$CD = \sqrt{(6-1)^2 + (6-6)^2} = \sqrt{25+0} = \sqrt{25} = 5(\ddot{u}h)$

$AD = \sqrt{(6-1)^2 + (6+4)^2} = \sqrt{25+100} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}\ (\ddot{u}h)$

f) Nelinurk ABCD on täisnurkne trapets ja selle pindala avaldub

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{5\sqrt{5} + 4\sqrt{5}}{2} \cdot 2\sqrt{5} = 4{,}5\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} = 45\ (\ddot{u}h^2)$$

Vastus: Trapetsi ABCD külgede pikkused on $2\sqrt{5}$ üh, $4\sqrt{5}$ üh, 5 üh ja $5\sqrt{5}$ üh ning pindala 45 üh^2.

9) *Riigieksam2001(15p.)* **Nelinurga KLMN tipud on K(1;1;7), L(3;3;7), M(9;1;1) ja N(4;0;4).**

1) Veenduge, et see nelinurk on trapets .Teha kindlaks, millised lõigud on selle trapetsi alusteks.

2) Selgitage, kas trapets on võrdhaarne.

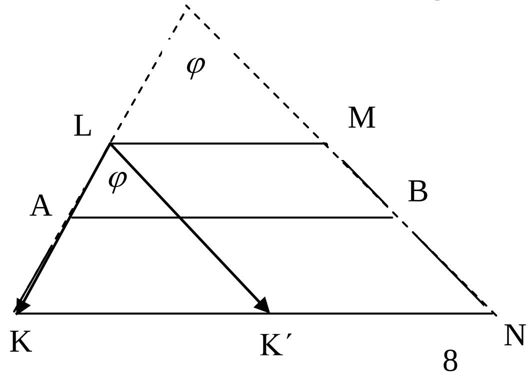
3) Leidke trapetsi kesklõigu otspunktid.

4) Leidke trapetsi haarade pikenduste vahelise nurga koosinus.

Lahendus. Avaldame nelinurga KLMN külgede vektorid

$\overrightarrow{LK} = (-2;-2;0)$, $\overrightarrow{LM} = (6;-2;-6)$, $\overrightarrow{MN} = (-5;-1;3)$, $\overrightarrow{KN} = (3;-1;-3)$.

Vektorid $\overrightarrow{MN}$ ja $\overrightarrow{LK}$ on kollineaarsed, kuna $\frac{6}{3} = \frac{-2}{-1} = \frac{-6}{-3}$.



Vektor $\overrightarrow{MN}$ ei ole kollineaarnevektoriga $\overrightarrow{LK}$,

kuna $\frac{-5}{-2} \neq \frac{-1}{-2} \neq \frac{3}{0}$.

Seega nelinurk KLMN on trapets, mille alusteks on LM ja KN. Haarad on KL ja NM.

Arvutame haarade pikkused valemiga $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, kus $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$.

Saame $\left|\overrightarrow{KL}\right| = \sqrt{4+4+0} = 2\sqrt{2}\ (üh)$, $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{25+1+9} = \sqrt{35}\ (üh)$. Seega KL ≠ MN ja trapets ei ole võrdhaarne

Trapetsi kesklõiguks on haarade keskpunkte ühendav lõik. Seega kesklõigu otspunktid on

$A\left(\frac{3+1}{2}; \frac{1+3}{2}; \frac{7+7}{2}\right) \Rightarrow A(2;2;7)$ ja $B\left(\frac{9+4}{2}; \frac{1+0}{2}; \frac{1+4}{2}\right) \Rightarrow B(6{,}5;0{,}5;2{,}5)$

Arvutame haarade LK ja MN pikenduste vahelise nurga koosinuse. Nurk vektorite $\overrightarrow{LK}$ ja $\overrightarrow{LK'}$ vahel on sama, mis trapetsi haarade pikenduste vahel (kuna tegemist on kaasnurkadega paralleelsete sirgete LK´ ja MN korral). Seega saame

$\overrightarrow{LK'} = \overrightarrow{MN} = (-5;-1;3)$,

$\overrightarrow{LK} = (-2;-2;0)$.

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{LK'}}{\left|\overrightarrow{LK}\right| \cdot \left|\overrightarrow{LK'}\right|},$$

$$\cos\varphi = \frac{(-5;-1;3)\cdot(-2;-2;0)}{\sqrt{4+4}\cdot\sqrt{35}} = \frac{10+2}{\sqrt{280}} = \frac{12}{2\sqrt{70}} = \frac{6}{\sqrt{70}} = \frac{6\sqrt{70}}{70} = \frac{3\sqrt{70}}{35}.$$

<u>Vastus.</u> Trapetsi alused on LK ja KN, trapets ei ole võrdhaarne. Kesklõigu otspunktite koordinaadid on A(2;2;7) ja B(6,5; 0,5; 2,5). Trapetsi haarade pikenduste vahelise nurga koosinus on $\cos\varphi = \frac{3\sqrt{70}}{35}$.

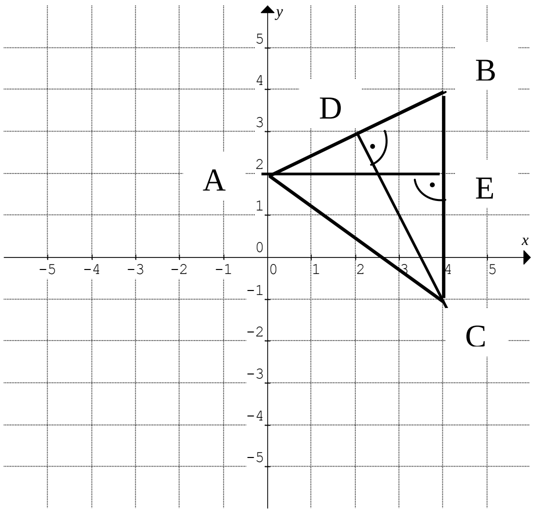
10) *Riigieksam 2002 (10p.)* **Kolmnurga tipud on A(0;2), B(4;4) ja C(4;-1).**

1) Joonestage antud kolmnurk koordinaattasandile ja arvutage selle pindala.

2) Koostage sirge AB võrrand.

3) Kui suur on tõus sirgel, millel paikneb tipust C joonestatud kolmnurga kõrgus?

Lahendus.



Võtame kolmnurga aluseks BC = 5 üh ja kõrguseks AE = 4 üh.

Kolmnurga pindala arvutame valemiga

$S = \frac{ah}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10\ (üh^2)$.

Koostame sirge AB võrrandi. Antud on punktid A(0;2) ja B(4;4). Koostame sirge võrrandi kahe punkti abil

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$; $\frac{x - 0}{4} = \frac{y - 2}{2} \Big| \cdot 4 \Rightarrow x = 2y - 4$

Avaldame y ja saame sirge AB võrrandiks

$y = 0{,}5x + 2$.

Kuna kolmnurga alus ja kõrgus on risti, siis

$AB \perp CD \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow 0{,}5 \cdot k_2 = -1 \Rightarrow k_2 = -2$

Vastus. Kolmnurga pindala on 10 pindalaühikut ja AB võrrand on y = 0,5x + 2. Sirge tõus, millel paikneb tipust C joonestatud kõrgus on -2.

11) Parabool $y = ax^2 + bx + c$ läbib punkte (-2;0), (6;0) ja (0;-12). Leia parabooli võrrand ja haripunkti koordinaadid.

Lahendus. Kuna antud punktid on graafiku lõikepunktid koordinaattelgedega, siis teame, et parabool lõikab y-telge punktis (0;-12) ja seega on ruutfunktsiooni vabaliige c = -12.
Lõikepunktid x- teljega (-2;0) ja (6;0) annavad funktsiooni nullkohad $x_1 = -2$ ja $x_2 = 6$.
Parabooli võrrandit võime otsida ka kujul $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ kus x_1 ja x_2 on ruutfunktsiooni nullkohad. Asendame nullkohad parabooli võrrandisse punktis(0;-12)
$a(0 + 2)(0 - 6) = -12$, millest leiame a
-12a = -12 ja a = 1.
Seega parabooli võrrand on $y = 1 \cdot (x + 2)(x - 6)$ ehk $y = x^2 - 4x - 12$.
Haripunkti abstsissi leiame kas valemi järgi (vt. lk. 70) või nullkohtade aritmeetilise keskmisena $x_h = \frac{-2 + 6}{2} = 2$ ja ordinaadi saame, kui asetame abstsissi väärtuse parabooli võrrandisse $y_h = 4 - 8 - 12 = -16$. Haripunkt on H(2;-16).
Vastus. Parabooli võrrand on $y = x^2 - 4x - 12$ ja haripunkt on H(2; -16).

12) Kolmnurga tipud on A(-2;1;-3), B(-3;-1;-1) ja C(-5;5;-3). Leia tipu A juures olev sisenurk α ja küljega AC paralleelse kesklõigu pikkus.

Lahendus. Leiame nurga skalaarkorutise abil kasutades valemit $\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Leiame tipust A vektorid $\overrightarrow{AB} = (-3 + 2; -1 - 1; -1 + 3) = (-1; -2; 2)$ ja
$\overrightarrow{AC} = (-5 + 2; 5 - 1; -3 + 3) = (-3; 4; 0)$. Leiame nende vektorite pikkused
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3üh$ ja $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9 + 16 + 0} = \sqrt{25} = 5(üh)$

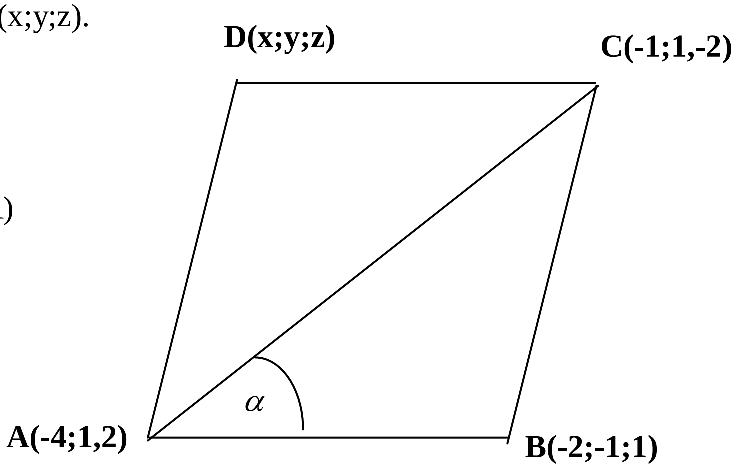
Leiame vektorite skalaarkorrutise $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 4 + 2 \cdot 0 = -5$ ja tipu A juures oleva sisenurga $\cos\alpha = \frac{-5}{3 \cdot 5} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{1}{3} \approx 109^\circ 28'$. Kolmnurga kesklõik võrdub poolega temaga paralleelsest küljest, seega kesklõik on $0{,}5AC = 2{,}5\ (üh)$.

Vastus. Tipu A juures olev sisenurk on $\alpha \approx 109^\circ 28'$ ja küljega AC paralleelne kesklõik on pikkusega 2,5 ühikut.

13) **Rööpküliku ABCD kolm tippu on A(-4;1;2), B(-2;-1;1) ja C(-1;1;-2). Leia neljas tipp ja nurk pikema diagonaali ning lühema külje vahel**.

Lahendus.

Leiame rööpküliku neljanda tippu D(x;y;z).



$\overrightarrow{AD} = (x+4; y-1; z-2)$.

Kuna $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, siis saame

$$\begin{cases} x+4=1 \\ y-1=2 \\ z-2=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=3 \\ z=-1 \end{cases} \Rightarrow D(-3;3;-1)$$

Leiame külgede AB ja BC pikkused

$\overrightarrow{AB} = (2;-2;-1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+4+1} = 3(üh)$

$\overrightarrow{BC} = (1;2;-3)$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}\ (üh)$

Leiame diagonaalide pikkused

$\overrightarrow{BD} = (-1;4;-2)$

$|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}\ (üh)$

$\overrightarrow{AC} = (3;0;-4)$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9+0+16} = 5\ (üh)$

Seega AC on pikem diagonaal ja AB on lühem külg. Leiame nende vahele jääva nurga valemist $\cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{2\cdot 3+(-2)\cdot 0+(-1)\cdot(-4)}{3\cdot 5} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \alpha \approx 48^0 11'$

Vastus. Tipu D koordinaadid on D(-3; 3; -1) ja α = 48º11′.

14) *Riigieksam 1997(10p.)* **Antud on tasandi neli punkti A(-6;-1), B(-4;-4), C(-1;-6) ja D(-3;-3). Tõestage, et nelinurk ABCD on romb ja arvutage selle pindala.**

Lahendus. Nelinurk on romb, kui tema diagonaalid on risti ja küljed on võrdsed.

Leiame rombi diagonaalideks olevad vektorid $\overrightarrow{AC} = (5;-5)$ ja $\overrightarrow{BD} = (1;1)$.

Kontrollime vektorite ristseisu sklalaarkorrutise abil $5\cdot 1 + (-5)\cdot 1 = 0$, st. diagonaalid on teineteisega risti.

Teiseks leiame külgede pikkused.

$$AB=\sqrt{(-4+6)^2+(-4+1)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}(üh)$$
$$BC=\sqrt{(-1+4)^2+(-6+4)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}(üh)$$
$$CD=\sqrt{(-3+1)^2+(-3+6)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}(üh)$$
$$AD=\sqrt{(-3+6)^2+(-3+1)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}(üh)$$
Leiame nüüd rombi pindala diagonaalide kaudu
$$S=\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|}{2}=\frac{\sqrt{25+25}\cdot\sqrt{1+1}}{2}=\frac{\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{100}}{2}=5\,üh^2$$
Vastus. Nelinurk on romb pindalaga 5 üh².

15) *Riigieksam 2000 (10p.)* **Täisnurkse kolmnurga kaks tippu on punktides A(1;-2;1) ja B(-4;-4;1). Täisnurga tipp C asetseb y- teljel. Leida punkti C koordinaadid**.

Lahendus. Kuna tipp C asub y- teljel, siis saame tema koordinaadid tähistada $C(0;y;0)$. Leiame selle tipu koordinaadid kasutades Pythagorase teoreemi. Vastavalt ülesande tekstile on kaatetiteks küljed AC ja BC ning hüpotenuusiks AB.

Seega $AB^2=AC^2+BC^2$.

Leiame

$$\overrightarrow{AB}=(-5,-2;0)$$
$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{25+4+0}=\sqrt{29}\ (üh)$$
$$\overrightarrow{AC}=(-1;y+2;-1)$$
$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{1+(y+2)^2+1}=\sqrt{y^2+4y+6}\ (üh)$$
$$\overrightarrow{BC}=(4;y+4;-1)$$
$$\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{16+(y+4)^2+1}=\sqrt{y^2+8y+33}\ (üh)$$
Asendame saadud tulemused Pythagorase teoreemi
$$29=y^2+4y+6+y^2+8y+33$$
$$2y^2+12y+10=0\ \left|:2\right.$$
$$y^2+6y+5=0$$
Lahendades ruutvõrrandi Viete´i teoreemi abil (vaata XIV kursus lk.21) saame lahenditeks y_1 = -5 ja y_2 = -1.

Oleme saanud kaks võimalikku tipu C asukohta (0;-5;0) või (0;-1;0).

Vastus. Täisnurga tipp asub punktis C_1 (0;-5;0) või C_2 (0;-1;0).

HARJUTUSÜLESANDED

1) Koosta võrrand sirgele, mis läbib punkti B(8;0) ja on paralleelne sirgega y = -x. Millises punktis läbib see sirget y = 0? ***V:*** y = -x + 8, (8;0)

2) Silindri telje otspunktid on O_1(0;-2;-3) ja O_2(0;4;3), vektor telje otspunktist O_2 sama põhja ümberringjoone punkti P on koordinaatidega $\overrightarrow{O_2P}$ = (0;2;-2). Leia nurk silindri telje ja y-telje vahel. Arvuta silindri ristlõike pindala, täispindala ja ruumala. ***V:*** 45º, S = 64π, V = $48\pi\sqrt{2}$

3) On antud punkt A(2;-1) ja sirge a: 4x-7y + 12 = 0. Koosta võrrand sirgetele b ja c, mis läbivad punkti A, kusjuures sirge b on paralleelne ja sirge c risti sirgega a. Tee joonis. ***V:*** 4x – 7y –15 = 0 ja 7x + 4y –10 = 0

4) *Riigieksam 1999.* Antud on sirged x + 7y – 6 = 0 ja 5x – 5y + 1 = 0.

a) Leia nende sirgete lõikepunkt

b) Leia nende sirgete vahelise teravnurga poolitaja võrrand.

V: $\left(\frac{23}{40};\frac{31}{40}\right)$ ja $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{12}$

5) *Riigieksam 1999.* Antud on sirged x+7y-6=0 ja 5x-5y+1=0.

a) Leia nende sirgete lõikepunkt

b) Leia nende sirgete vahelise nürinurga poolitaja võrrand

V: $\left(\frac{23}{40};\frac{31}{40}\right)$ ja y = -3x + 2,5

6) Joone $y = -x^2 - 2x + 8$ graafiku teises veerandis asuval osal on antud punktid $A_1(x_1;y_1)$ abstsissiga $x_1 = -1$ ja $A_2(x_2;y_2)$ ordinaadiga $y_2 = 5$.Leia

a) punktide A_1 ja A_2 koordinaadid

b) vektorite OA_1 ja OA_2 skalaarkorrutis;

c) vektorite OA_1 ja OA_2 vahelise nurga suurus täpsusega 1′.

V: $A_1(-1;9)$, $A_2(-3;5)$; 48; 24º37′

7) *Riigieksam 2000* Täisnurkse kolmnurga kaks tippu on punktides A(1;-2;1) ja B(-4;-4;1). Täisnurga tipp C asetseb y- teljel. leia punkti C koordinaadid. ***V:*** (0;-5;0) või (0;-1;0)

8) *Riigieksam 2003 (15 p.)* Tasandil on antud 4 sirget. Esimene neist on antud võrrandiga *y* = 0,5x + 3. Teine on paralleelne esimesega ja läbib punkti *P*(2; –1). Kolmas on risti esimesega ja läbib punkti *Q*(–3; –1). Neljas on paralleelne *y*-teljega ja läbib punkti *R*(6; 3). Kolmas sirge lõikab esimest sirget punktis *A* ja teist punktis *B*. Neljas sirge lõikab esimest sirget punktis *D* ja teist punktis *C*.

a) Tehke joonis ja koostage antud sirgete võrrandid.

b) Leidke nelinurga *ABCD* tippude koordinaadid.

c) Arvutage nelinurga *ABCD*

1. külgede täpsed pikkused,
2. pindala.

V:

$y=0{,}5x-2; y=-2x-7; x=6; A(-4;1), B(-2;-3), C(6;1), D(6;6); 2\sqrt{5}\,ü, 4\sqrt{5}\,ü, 5\sqrt{5}\,ü, 5\,ü; S=45\,ü^2$

9) *Riigieksam 2004 (15 p.)* Antud on sirged $y = x$, $y = -4x$ ja $y = -x + 6$.

d) Arvutage nende sirgete lõikepunktide koordinaadid.

e) Joonestage antud sirged ühes ja samas teljestikus.

f) Leidke antud sirgete lõikepunkte läbiva parabooli $y = ax^2 + bx + c$ võrrand.

g) Arvutage eelmises punktis saadud parabooli haripunkti koordinaadid.

V: $A(0;0), B(3;3), C(-2;8), y=x^2-2x, H(1;-1)$

10) *Riigieksam 2005 (15 p.)* Kolmnurk *ABC* on määratud tipuga *A*(2;1) ja vektoritega *AB* = (2;3) ning *BC* = (− 5;0).

a) Arvutage tippude *B* ja *C* koordinaadid ning joonestage kolmnurk *ABC* .

b) Arvutage külje *AC* pikkus.

c) Koostage punkte *A* ja *C* läbiva sirge võrrand ning leidke selle sirge ja *x*-telje lõikepunkti koordinaadid.

d) Koostage kolmnurga *ABC* ümberringjoone võrrand.

V: $B(4;4), C(-1;4), 3\sqrt{2}\,ü, y=-x+3, (3;0); (x-1{,}5)^2+(y-3{,}5)^2=6{,}5$

11) *Riigieksam 2006 (15 p.)* Võrdhaarse kolmnurga haarad asetsevad sirgetel $2x + 3y - 12 = 0$ ja $3x + 2y - 12 = 0$. Aluse keskpunkt on $K(-0,6;\, 5,4)$. Tehke joonis ja leidke

a) kolmnurga haarade lõikepunkti koordinaadid;
b) võrrand sirgele, millel asetseb kolmnurga alus;
c) kolmnurga kõrguse täpne pikkus.

V: $L(2,4;2,4),\, y = x + 6; 3\sqrt{2}\, ü$

12) *Riigieksam 2007 (15 p.)* Võrdhaarse trapetsi *ABCD* alused on paralleelsed *y*-teljega ja *x*-telg on trapetsi sümmeetriateljeks. Antud on tipp *A*(1,5; -5,5) ning vektor $\overrightarrow{AD} = (3,2;2,4)$
Tehke joonis ja leidke
1) trapetsi pindala;
2) trapetsi alusnurk;
3) selle sirge võrrand sirgele, millel paikneb haar *AD*;
4) haarade pikenduste lõikepunkt.

V:

1) 27,52; 2) $\alpha = \arctan \frac{4}{3} \approx 53°08'$; 3) $3x - 4y - 26,5 = 0$; $L\left(\frac{53}{6};0\right)$.

13) *Riigieksam 2008 (10 p.)* Punktist *A*(–2; 2) on joonestatud vektor *AB* = (6; 2). Läbi punkti *D*(–3; –5) on joonestatud sirge *DC*, mis on paralleelne sirgega *AB*. Punktide *A*, *B*, *C* ja *D* järjestikusel ühendamisel saadakse täisnurkne trapets, mille täisnurk on tipu *B* juures.
1) Tehke joonis.
2) Kirjutage sirgete *DC* ja *BC* võrrandid
3) Arvutage punkti *C* koordinaadid.
4) Arvutage trapetsi kõrgus.

V: $y = \frac{1}{3}x - 4; y = -3x + 16; C(6;-2); h = 2\sqrt{10}\, ü$

14) *Riigieksam 2009 (15 p.)* Ristküliku *ABCD* üheks tipuks on punkt *A*(4; 3), tipp *B* asub *x*-teljel ja küljega *AB* paralleelne külg *CD* asub sirgel $x - y + 7 = 0$.
1) Arvutage ristküliku *ABCD* tippude *B*, *C* ja *D* koordinaadid ning joonestage ristkülik *ABCD* koordinaattasandile.
2) Koostage sirge võrrand, millel asub ristküliku diagonaal *AC*.
3) Arvutage ristküliku *ABCD* ümbermõõdu täpne väärtus
4) Koostage ristküliku *ABCD* ümberringjoone võrrand.

V: $B(1;0), C(-3;4), D(0;7); x + 7y + 25 = 0; 14\sqrt{2}\, ü, (x - 0,5)^2 + (y - 3,5)^2 = 12,5$

15) *Riigieksam 2010 (15 p.)* Funktsiooni $f(x) = x^2 - 4x + 3$ graafik lõikab *y*-telge punktis A ja *x*-telge punktides $D(x_1;0)$ ning $C(x_2;0)$, kus $x_1 < x_2$. Sirge s läbib punkte A ja D ning sirge t läbib punkte A ja C. Sirge u on paralleelne sirgega $y = x$. Sirged s ja u lõikuvad punktis B ning sirged t ja u lõikuvad punktis C.

1) Koosta sirgete s, t, ja u võrrandid ning arvuta punkti B koordinaadid;
2) Joonista funktsiooni $f(x)$ graafik ja sirged s, t ja u;
3) Näita, et ΔABC on täisnurkne ja arvuta ∠BAC.

V: $y = -3x + 3, y = -x + 3, y = x - 3; B(1,5;-1,5); \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 26°34'$

16) *Riigieksam 2011 (15 p.)* Joonte f(*x*) = $\sqrt{x+5}$ ja g(*x*) = *x* + 3 lõikepunkt *A* on rombi *ABCD* tipp. Diagonaali vektor on $\overrightarrow{AC} = (4;-4)$. Tipp *B* asub *y*-teljel.

1) Arvuta rombi tippude koordinaadid ja koosta sirge võrrand, millel asub diagonaal *BD*.
2) Arvuta rombi pindala.

3) Joonesta funktsioonide f(x) ja g(x) graafikud ja romb *ABCD*.

V: $A(-1;2), B(0;-1), C(3;-2), D(2;1); 8\,\ddot{u}h^2$

17) *Riigieksam 2012 (15 p.)* Sirge *s* on määratud punktiga *A*(0;0) ja sihivektoriga $\vec{s} = (-1;2)$. Sirge *t* läbib punkti *B*(4;2) ja on risti sirgega *s*.

a) Koosta sirgete *s* ja *t* võrrandid.

b) Märgi koordinaatteljestikku punktid *A* ja *B* ning joonesta sirged *s* ja *t*.

c) Sirgel *s* asub punkt *C* nii, et kolmnurga *ABC* pindala on 15. Leia arvutamise teel punkti *C* koordinaadid, kui punkt *C* asub koordinaatteljestiku IV veerandis.

d) Koosta ringjoone, mille diameeter on *AB*, võrrand.

V: $s: y = -2x; t: y = 0{,}5x; C(3;.6); (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$