KORDAMINE RIIGIEKSAMIKS III

TRIGONOMEETRIA

1) põhiseosed

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$,

$1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $\tan\alpha\cot\alpha = 1$

2) trigonomeetriliste funktsioonide täpsed väärtused

α	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

3) täiendusnurga valemid

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\tan(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha}$$

4) negatiivse nurga trigonomeetrilised funktsioonid

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

5) summa ja vahe trigonomeetrilised funktsioonid

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

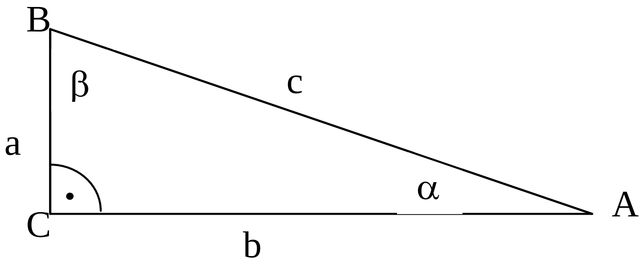
6) kahekordse nurga trigonomeetrilised funktsioonid

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

7) poolnurga trigonomeetrilised funktsioonid

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

8) seosed täisnurkses kolmnurgas.



a) $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$ $\sin\beta = \dfrac{b}{c}$

b) $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$ $\cos\beta = \dfrac{a}{c}$

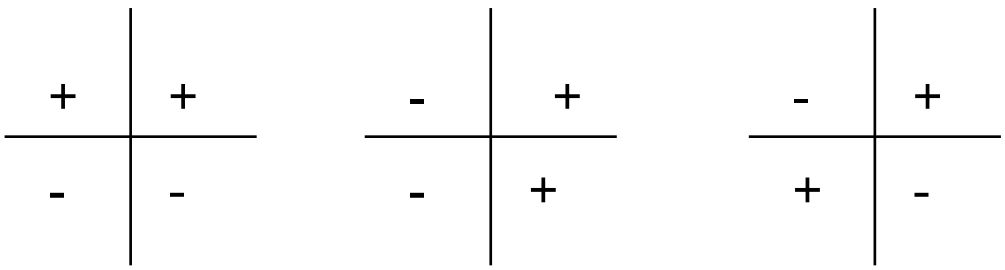
c) $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$ $\tan\beta = \dfrac{b}{a}$

9) $\sin(\alpha + n\cdot 360°) = \sin\alpha$

$\cos(\alpha + n\cdot 360°) = \cos\alpha$

$\tan(\alpha + n\cdot 360°) = \tan\alpha$

10)



sin α   cos α   tan α ja cotα

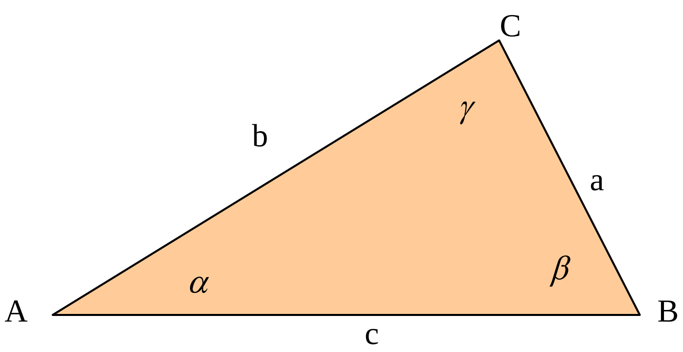
11) Siinusteoreem $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$

12) Koosinusteoreem

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$

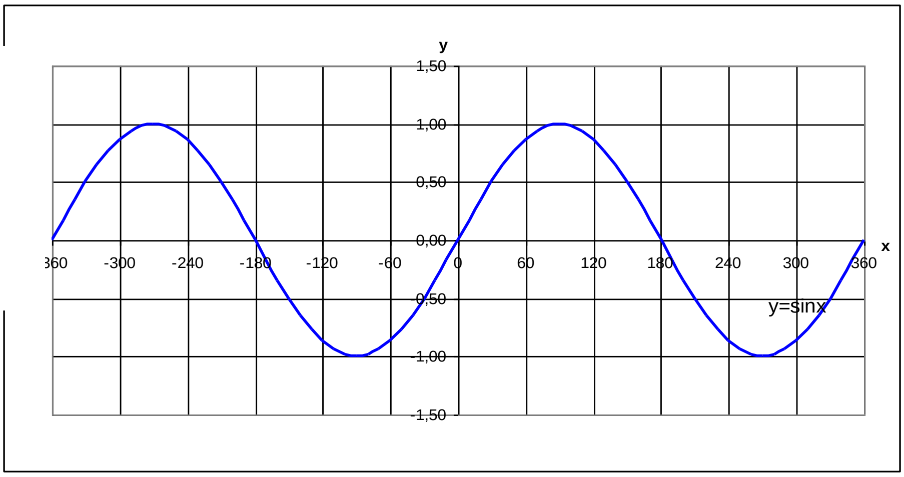
$b^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$

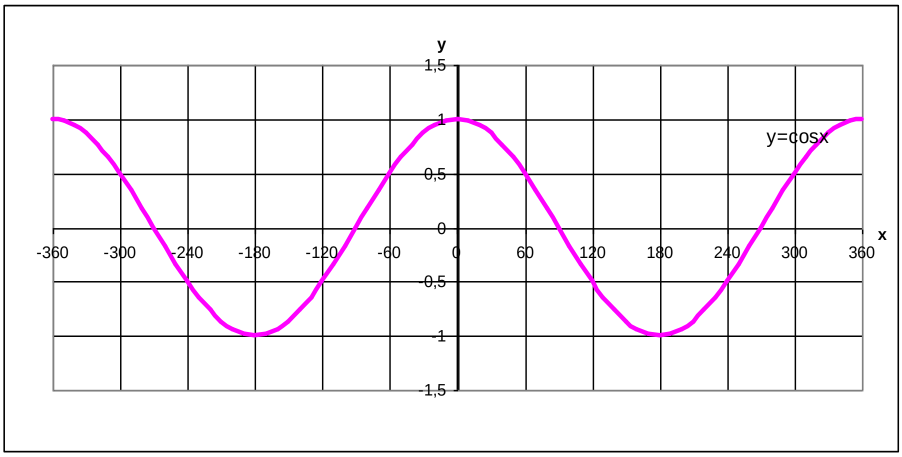


13) Trigonomeetrilised funktsioonid

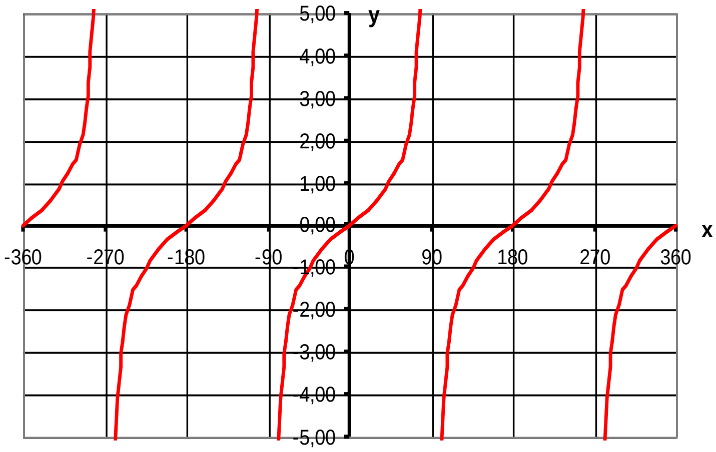
Funktsioon y = sinx
Määramispiirkond X=R
Muutumispiirkond Y= $[-1;1]$
Paaritu funktsioon
sin(- α) = -sin α
Periood $2\pi = 360^0$



Funktsioon y = cosx
Määramispiirkond X=R
Muutumispiirkond Y=$[-1;1]$
Paarisfunktsioon
cos(- α) = cos α
Periood $2\pi = 360^0$



Funktsioon y = tanx
Määramispiirkond X=R/{(2n+1)π/2}, n∈Z
Muutumispiirkond Y=R
Paaritu funktsioon tan(- α) = -tan α
Periood $\pi = 180^0$



14) Trigonometrilised põhivõrrandid ja nende lahendivalemid

(1) sin x = m **x = $(-1)^n$·arcsin m + nπ, kus n $\in$ Z**

(2) cos x = m **x = $\pm\arccos m + 2n\pi$, kus n $\in$ Z**

(3) tan x = m **x = $\arctan m + n\pi$, kus n $\in$ Z**

NB! sin ja cos korral tuleks kontrollida lahendeid n = 0 ja n = 1, tan n = 0 korral.

a) Võrrandi teisendamine algebraliseks võrrandiks.

Näide.

Lahendame võrrandi $\tan^2 x - 4\tan x + 3 = 0$.

Teeme asenduse tanx = u. Saame võrrandi $u^2 - 4u + 3 = 0$.

Viete´i teoreemi põhjal saame lahendid $u_1 = 1$ ja $u_2 = 3$.

Leiame nüüd tundmatu x väärtused lahendades võrrandid tanx = 1 ja tanx = 3.

tanx = 1 $\Rightarrow$ x = $\arctan 1 + n\pi$ $\Rightarrow$ x = $\frac{\pi}{4} + n\pi$, n $\in$ Z

Kontrolliks leiame võrrandi erilahendi, kui n = 0: $x = \frac{\pi}{4} + 0 \cdot \pi = \frac{\pi}{4}$

v = $\tan^2 \frac{\pi}{4} - 4\tan \frac{\pi}{4} + 3 = 1 - 4 \cdot 1 + 3 = 0$ v = p

Lahend: x = $\frac{\pi}{4} + n\pi$, n $\in$ Z

b) Homogeensete trigonomeetriliste võrrandite lahendamine.

Homogeensed võrrandid esituvad kujul $a\sin x + b\cos x = 0$ (või $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$ jne.) Selliste võrrandite lahendamiseks jagame võrrandi mõlemad pooled koosinuse kõrgema astmega läbi.

Näide.

Lahendame võrrandi 2sinx + cosx = 0.

2sinx + cosx = 0|:cosx

2tanx + 1 = 0 $\Rightarrow$ 2tanx = -1 |:2 $\Rightarrow$ tanx = -0,5 $\Rightarrow$ x = $\arctan(-0{,}5) + n\pi$, n $\in$ Z

Kontroll. Leiame erilahendi, kui n = 0:

$x = \arctan(-0{,}5) + 0 \cdot \pi = \arctan(-0{,}5) \Rightarrow x \approx -26^0 57'$ $\Rightarrow$ v = 2sin $(-26^0 57')$ + cos $(-26^0 57')$ $\approx -0{,}9064 + 0{,}8914 \approx 0$.

Lahend: x = $\arctan(-0{,}5) + n\pi$, n $\in$ Z

c) Teguriteks lahutamise meetod.

Näide.

Lahendame võrrandi $2\sin^2 3x + \sqrt{3}\sin 3x = 0$.

$2\sin^2 3x + \sqrt{3}\sin 3x = 0 \Rightarrow \sin 3x\left(2\sin 3x + \sqrt{3}\right) = 0$

Korrutise nulliga võrdumise tingimusest saame:

1) sin 3x = 0 $\Rightarrow$ 3x = $(-1)^n \arcsin 0 + n\pi$ |:3 $\Rightarrow$ x = $(-1)^n \arcsin 0 + n\pi \Rightarrow$

$x_1 = \frac{n\pi}{3}$, n $\in$ Z.

2) $2\sin 3x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow 2\sin 3x = -\sqrt{3}$ |:2 $\Rightarrow \sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$3x = (-1)^n \cdot \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + n\pi \;|:3 \Rightarrow x_2 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{9} + \frac{n\pi}{3}$, $n \in Z$.

Kontroll.

$x_1 = \frac{n\pi}{3}$, $n \in Z$. Leiame erilahendid:

$n = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $v = 2\sin^2 0 + \sqrt{3}\sin 0 = 0$ v = p

$n = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{3}$ $v = 2\sin^2\frac{3\pi}{3} + \sqrt{3}\sin\frac{3\pi}{3} = 2\cdot 0 + \sqrt{3}\cdot 0 = 0$ v = p

$x_2 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{9} + \frac{n\pi}{3}$, $n \in Z$. Leiame erilahendid

$n = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{9}$ $v = 2\sin^2\left(-\frac{3\pi}{9}\right) + \sqrt{3}\sin\left(-\frac{3\pi}{9}\right) = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0 \quad v = p$

$n = 1 \Rightarrow x_1 = \frac{4\pi}{9}$ $v = 2\sin^2\frac{3\cdot 4\pi}{9} + \sqrt{3}\sin\frac{3\cdot 4\pi}{9} = 2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =$

$= \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0 \quad v = p$

Lahendid on $x_1 = \frac{n\pi}{3}$ ja $x_2 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{9} + \frac{n\pi}{3}$, $n \in Z$.

NÄITEÜLESANDED.

1) Tõesta samasus $\frac{\sin^2\alpha - \tan^2\alpha}{\cos 2\alpha + \sin^2\alpha - 1} = \tan^2\alpha$.

Lahendus.

Teisendame esmalt vasaku poole murru lugeja:

$\sin^2\alpha - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha(\cos^2\alpha - 1)}{\cos^2\alpha}$.

Murru nimetajast saame:

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha + \sin^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - 1$.

Jagades lugeja ja nimetaja omavahel saame $\frac{\sin^2\alpha(\cos^2\alpha - 1)}{\cos^2\alpha(\cos^2\alpha - 1)} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha$.

2) Lahenda võrrand $\sin 2x = \cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2}$.

Lahendus.

Lihtsustame esmalt võrrandi paremat poolt kasutades ruutude vahe valemit ning lõpuks kahekordse nurga koosinuse valemit

$\cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2} = \left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right)\underbrace{\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)}_{1} = \left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) =$

$= \cos 2\cdot\frac{x}{2} = \cos x$.

Saame nüüd võrrandi $2\sin x\cdot\cos x = \cos x \Rightarrow 2\sin x\cdot\cos x - \cos x = 0 \Rightarrow$
$\cos x(2\sin x - 1) = 0$

Kasutades korrutise nulliga võrdumise tingimust saame kaks võrrandit

(1) cosx = 0 (2) 2sinx – 1 = 0

Lahendame esimese võrrandi cosx = 0 $\Rightarrow x_1 = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in Z$.

Teisest võrrandist 2sinx – 1 = 0 $\Rightarrow$ 2sinx = 1| :2 $\Rightarrow$ sinx = 0,5 $\Rightarrow$

$x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in Z$.

Kontroll.

$x_1 = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi,\ n \in Z$

n = 0 $\Rightarrow$ $x_1 = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow$ v= sin $(\pm\pi)$= 0, p= $\cos^4\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) - \sin^4\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) =$

$= \cos^4\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin^4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = 0 \Rightarrow$ v = p

n = 1 $\Rightarrow$ $x_1 = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi$

x = $\frac{5\pi}{2} \Rightarrow$ v= sin $2\cdot\frac{5\pi}{2} = \sin 5\pi = 0$; p= $= \cos^4\left(\frac{5\pi}{4}\right) - \sin^4\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow$ v = p

x = $\frac{3\pi}{2} \Rightarrow$ v= sin $2\cdot\frac{3\pi}{2} = \sin 3\pi = 0$; p= $= \cos^4\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \sin^4\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow$ v = p

$x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in Z$

n = 0 $\Rightarrow$ $x_2 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow$ v= sin $2\cdot\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866$;

$p = \cos^4\left(\frac{\pi}{12}\right) - \sin^4\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 0,8705 - 0,0045 = 0,866$ v = p

n = 1 $\Rightarrow$ $x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow$ v= $\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,866$;

p $= \cos^4\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \sin^4\left(\frac{5\pi}{12}\right) \approx 0,0045 - 0,8705 = -0,866 \Rightarrow$ v = p

Vastus. Võrrandi lahenditeks on $x_1 = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ ja $x_2 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi,\ n \in Z$.

3) *Riigieksam1999 (15p.)* **Leidke sin2α, kui sinα rahuldab võrrandit cos2α = 7sin²α ja $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.**

Lahendus.

Teisendame võrrandi vasakut poolt kasutades kahekordse nurga koosinuse valemit

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$.

Saime võrrandi $1 - 2\sin^2\alpha = 7\sin^2\alpha \Rightarrow 1 - 9\sin^2\alpha = 0 \Rightarrow 9\sin^2\alpha = 1$| :9 $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{9} \Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{1}{3}$. Kuna $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, siis sinα < 0 $\Rightarrow \sin\alpha = -\frac{1}{3}$ ja kuna α on III veerandi nurk ,siis ka cosα on negatiivne ning

$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -\sqrt{1-\frac{1}{9}} = -\sqrt{\frac{8}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Leiame nüüd $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

Vastus. $\sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

4) *Riigieksam2001 (20p.)* **Lahendage võrrand cosx + sinx = 1, kui $x \in [-2\pi; 2\pi]$ Leidke parameetri a kõik väärtused, mille korral võrranditel cosx + sinx = 1 ja $\cos\frac{x}{2} = a$ leiduvad ühised lahendid, kui $x \in [-2\pi; 2\pi]$. Leidke funktsiooni y = $\cos\frac{x}{2}$ periood ja skitseerige selle funktsiooni graafik, kui $x \in [-2\pi; 2\pi]$.**

Skitseerige samale joonisele funktsiooni y = $|\cos\frac{x}{2}|$ graafik.

Lahendus.

a) Lahendame võrrandi cosx + sinx = 1.

cosx + sinx = 1 |( )² $\Rightarrow$ cos²x + 2cosx·sinx + sin²x = 1

Kuna sin²x + cos²x = 1, siis 2cosx·sinx = 0 $\Rightarrow$ sin2x = 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ 2x = $(-1)^n \cdot 0 + n\pi, n \in Z \Rightarrow$ x = $n \cdot \frac{\pi}{2}, n \in Z$.

Leiame lahendid lõigul $x \in [-2\pi; 2\pi]$.

Kui n = 0 $\Rightarrow$ x = 0 $\Rightarrow$ cos 0 + sin0 = 1 ; n = 1 $\Rightarrow$ x = $\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} = 1$

n = 2 $\Rightarrow$ x = π $\Rightarrow$ cos π + sin π = -1 võõrlahend

n = 3 $\Rightarrow$ x = $\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2} = -1$ võõrlahend

n = 4 $\Rightarrow$ x = 2π $\Rightarrow$ cos 2π + sin 2π = 1

n = -1 $\Rightarrow$ x = $-\frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(-\frac{\pi}{2}) + \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ võõrlahend

n = -2 $\Rightarrow$ x = $-\pi$ $\Rightarrow$ cos($-\pi$) + sin($-\pi$) = -1 võõrlahend

n = -3 $\Rightarrow$ x = $-\frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos(-\frac{3\pi}{2}) + \sin(-\frac{3\pi}{2}) = 1$

n = -4 $\Rightarrow$ x = -2π $\Rightarrow$ cos (-2π) + sin(-2π) = 1.

Võrrandi cosx + sinx = 1 lahendid , kui $x \in [-2\pi; 2\pi]$ on $\{-2\pi; -1{,}5\pi; 0; 0{,}5\pi; 2\pi\}$.

b) Leiame parameetri a kõik väärtused, mille korral võrranditel cosx + sinx = 1 ja $\cos\frac{x}{2} = a$ leiduvad ühised lahendid, kui $x \in [-2\pi; 2\pi]$. Selleks asendame võrrandis $\cos\frac{x}{2} = a$ x-i väärtused eelmises punktis saadud tulemustega.

$$a_1 = \cos\left(-\frac{2\pi}{2}\right) = \cos\pi = -1$$

$$a_2 = \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_3 = \cos 0 = 1$$

$$a_4 = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

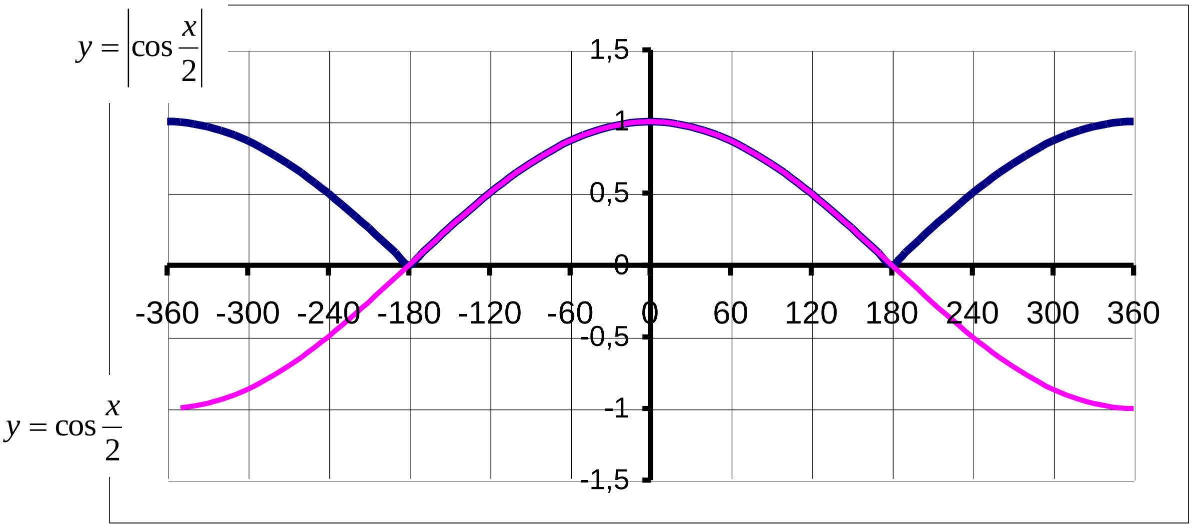
$$a_5 = \cos\frac{2\pi}{2} = -1$$

c) Leiame funktsiooni y = $\cos\frac{x}{2}$ perioodi.

Kui funktsiooni periood on T, siis funktsiooni y = sin k·x (y = cos k·x või y = tan k·x) perioodi leiame $\frac{T}{|k|}$, kus $k \in R$.

Saame 2π : 0,5 = 4π = 720º.

Skitseerime funktsioonide y = $\cos\frac{x}{2}$ ja y = |$\cos\frac{x}{2}$| graafikud. Kasutame selleks ka eelmises punktis leitud väärtusi.



5) *(Riigieksam2002 15p.)* **Vaatleme funktsioone f(x) = cos2x ja g(x) = cosx.**

a) Avaldage cos2x suurus cosx kaudu.

b) Lõigul $[0;2\pi]$

(1) lahendage võrrand f(x) = g(x).

(2) joonestage ühes ja samas teljestikus funktsioonide f(x) ja g(x) graafikud. Leidke joonise abil x väärtused, mille korral f(x) > g(x).

<u>*Lahendus.*</u>

a) Avaldame cos2x suurus cosx kaudu. Kasutame kahekordse nurga koosinuse valemit ning seost $\sin^2x + \cos^2x = 1$

$\cos 2x = \cos^2x - \sin^2x = \cos^2x - (1 - \sin^2x) = 2\cos^2x - 1$.

b) Lahendame võrrandi f(x) = g(x) ehk cos2x = cosx. Kasutame selleks eelmises punktis saadud tulemust.

$2\cos^2x - 1 = \cos x \Rightarrow 2\cos^2x - \cos x - 1 = 0$

Lahendame saadud ruutvõrrandi cosx suhtes.

$D = 1 - 4\cdot 2\cdot(-1) = 9$

$\cos x = \dfrac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \cos x = 1 \; v\tilde{o}i \; \cos x = -\dfrac{1}{2}$.

Lahendame võrrandid cosx = 1 ja cosx = -0,5.

$\cos x = 1 \Rightarrow x_1 = \pm 0 + n\pi = n\pi,\ n \in Z$

$\cos x = -0{,}5 \Rightarrow x_2 = \pm\dfrac{2\pi}{3} + n\pi,\ n \in Z$.

Leiame erilahendid lõigul $[0;2\pi]$

(1) $x_1 = \pm 0 + n\pi = n\pi,\ n \in Z$

n = 0 $\Rightarrow$ x = 0 $\Rightarrow$ v= cos2$\cdot$ 0= 1 ja p= cos0=1

n = 1 $\Rightarrow$ x = π $\Rightarrow$ v= cos 2π = 1 ja p= cosπ =-1 võõrlahend

n = 2 $\Rightarrow$ x = 2π $\Rightarrow$ v= cos 4π = 1 ja p= cos2π =1

(2) $x_2 = \pm\dfrac{2\pi}{3} + n\pi,\ n \in Z$.

n = 0 $\Rightarrow$ x = $\dfrac{2\pi}{3}$ $\Rightarrow$ v= cos $\dfrac{4\pi}{3}$ = -0,5 ja p= cos $\dfrac{2\pi}{3}$ = - 0,5

n = 1 $\Rightarrow$ x = $\dfrac{5\pi}{3}$ $\Rightarrow$ v= cos $\dfrac{10\pi}{3}$ = -0,5 ja p= cos $\dfrac{5\pi}{3}$ = 0,5 võõrlahend

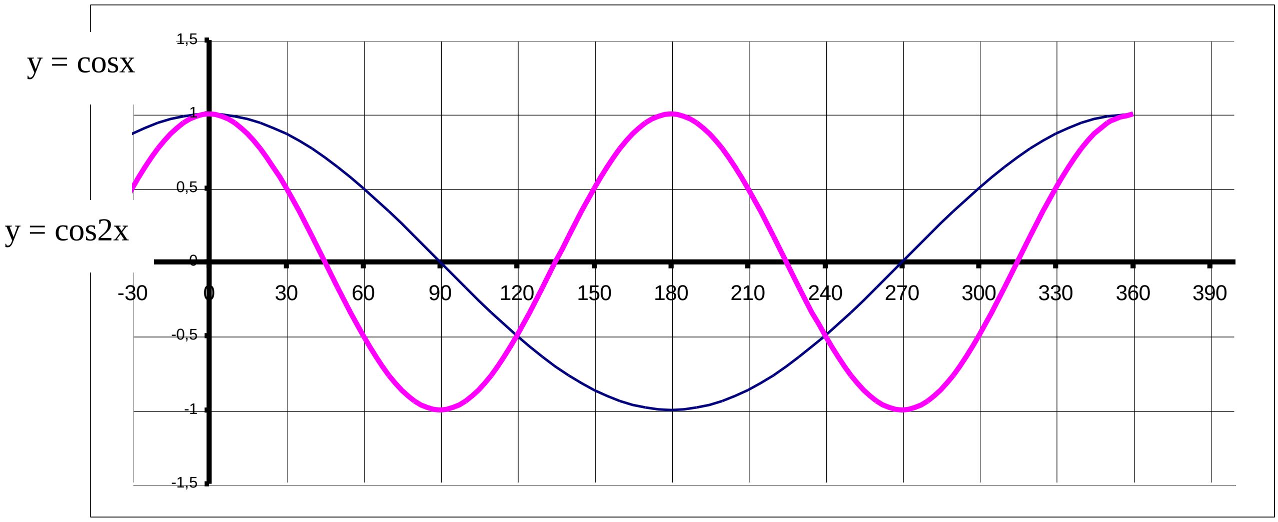
n = 1 $\Rightarrow$ x = $\dfrac{\pi}{3}$ $\Rightarrow$ v= cos $\dfrac{2\pi}{3}$ = -0,5 ja p= cos $\dfrac{\pi}{3}$ = 0,5 võõrlahend

n = 2 $\Rightarrow$ x = $\dfrac{4\pi}{3}$ $\Rightarrow$ v= cos $\dfrac{8\pi}{3}$ = -0,5 ja p= cos $\dfrac{4\pi}{3}$ = -0,5

Seega saime võrrandi cos2x = cosx lahenditeks lõigul $[0;2\pi]$

$x \in \left\{0; \dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{4\pi}{3}; 2\pi\right\}$.

Joonestame samas teljestikus funktsioonide f(x) = cos2x ja g(x) = cosx graafikud. Funktsiooni f(x) = cos2x perioodiks on 360º : 2 = 180º ja g(x) = cosx perioodiks 360º.



Leiame joonise abil x väärtused, mille korral f(x) > g(x).Selleks on vahemik $\left]120^o;240^o\right[$ ehk $\left]\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right[$.

6) *Riigieksam 2000 (20p).* **On antud funktsioon f(x)=**$\frac{2\sin x-1}{\sin x}$**, x**$\in\left]0;\pi\right[$**.**

- **a) Selgitage, kas funktsioon f(x) on määratud ka lõigul x∈[0;π].**
- **b) Leidke vahemikus (0;π)**
  - **(1) funktsiooni f(x) nullkohad;**
  - **(2) vahemikud, kus funktsioon f(x) on positiivne ja kus see on negatiivne;**
  - **(3) funktsiooni f(x) kasvamis- ja kahanemisvahemikud;**
  - **(4) funktsiooni f(x) maksimumpunkt;**
- **c) Skitseerige funktsiooni f(x) graafik vahemikus (0;π).**

<u>*Lahendus.*</u>

a) Leiame funktsiooni väärtused lõigu otspunktides.

f(0)=$\frac{2\sin 0-1}{\sin 0}$ ei ole määratud, kuna sin 0 = 0 ja murru nimetaja ei tohi olla null.

f(π)=$\frac{2\sin\pi-1}{\sin\pi}$ ei ole määratud, kuna sin π = 0 ja murru nimetaja ei tohi olla null.

Seega on funktsioon määratud ainult vahemikus $\left]0;\pi\right[$.

b) Leiame funktsiooni nullkohad.

$$\frac{2\sin x-1}{\sin x}=0\Rightarrow\begin{cases}2\sin x-1=0\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Rightarrow 2\sin x=1\,|:2\Rightarrow\sin x=0{,}5$$

Lahendivalemist saame $x=(-1)^n\cdot 30^0+n\cdot 180^0,\ n\in Z$.

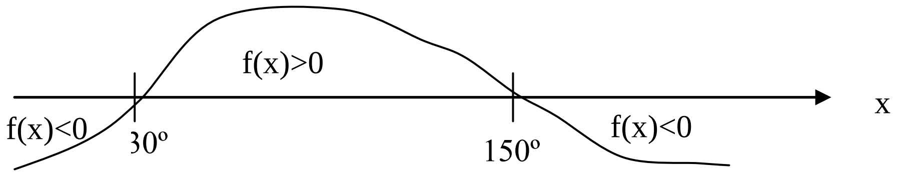
Leiame erilahendid vahemikust $\left]0;\pi\right[$.

Kui n = 0 $\Rightarrow x_1$= 30º kontroll: $\frac{2\sin 30^0-1}{\sin 30^0}=\frac{0}{0{,}5}=0$

Kui n = 1 $\Rightarrow x_2$= 150º kontroll: $\frac{2\sin 150^0-1}{\sin 150^0}=\frac{0}{0{,}5}=0$.

Seega funktsiooni f(x) nullkohad vahemikus $\left]0;\pi\right[$ on $x\in\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$.

Positiivsuspiirkonna leidmiseks tuleb lahendada võrratus $\frac{2\sin x - 1}{\sin x} > 0$ ja negatiivuspiirkonna leidmiseks $\frac{2\sin x - 1}{\sin x} < 0$. Kasutades leitud nullkohti skitseerime märgikõvera.



Leiame jooniselt vahemikud, kus funktsioon f(x) on positiivne ja kus ta on negatiivne

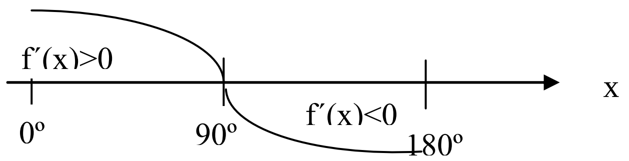
$X^{+} = \left]\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right[\ ja\ X^{-} = \left]0; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}; \pi\right[$.

Kasvamis- ja kahanemisvahemike leidmiseks leiame funktsiooni tuletise

$f'(x) = \frac{2\cos x \sin x - \cos x(2\sin x - 1)}{\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$

Kasvamisvahemiku leidmiseks lahendame võrratuse f´(x) > 0.
Kahanemisvahemiku leidmiseks lahendame võrratuse f´(x) < 0.

Kuna $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$ avaldises murru nimetaja on alati positiivne, siis määrab võrratuse lahendid avaldis cosx.



Leiame jooniselt, et vahemikus $]0;\pi[$ kasvamis- ja kahanemisvahemikud vastavalt

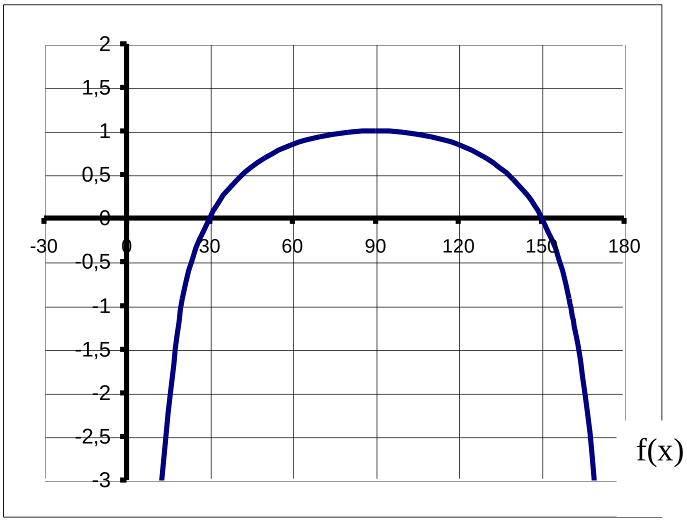
$X\uparrow = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[\ ning\ X\downarrow = \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$.

Kuna kohal x = 90º läheb kasvamine üle kahanemiseks, siis on tegemist maksimumkohaga ning leiame punkti ordinaadi y = $\frac{2\sin 90^0 - 1}{\sin 90^0} = 1$.

Funktsiooni f(x) maksimumpunkt $P_{max}\left(\frac{\pi}{2};1\right)$.

c) Skitseerime funktsiooni graafiku vahemikus $]0;\pi[$. Kasutame eelnevalt leitud nullkohti ja maksimumpunkti koordinaate ning leiame lisaks veel mõned funktsiooni väärtused.

f(15º) $\approx$-1,9; f(60º) $\approx$0,8; f(120º) $\approx$0,8; f(165º) $\approx$-1,9



ÜLESANDED

1) Lahenda võrrand $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$. ***V:*** $x_1 = 2n\pi, \quad x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi, \quad n \in Z$

2) On antud funktsioon $f(x) = \sin^2 x - 4\sin x\cos x + 3\cos^2 x$

a) Lihtsusta $f(x) + 2\sin 2x - \cos 2x$

b) Lahenda võrrand $f(x) = 0$

c) Lahenda võrratus $f(x) \geq \cos 2x$

V: 2; $x_1 = \frac{\pi}{4} + n\pi,\ x_2 = \arctan 3 + n\pi, \quad n \in Z$; $x \in R$

3) *KRE 97* Lahenda võrrand $\cos 2\pi - \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$.

V: $x_1 = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi, \quad x_2 = n\pi,\ n \in Z$

4) *KRE97* Lihtsusta avaldis:

$$\left[\sin(\pi-\alpha)+\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)\right]^2 - 2\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)\cdot\cos(2\pi-\alpha)+\tan(\pi+\alpha)$$ *ja* arvuta, kui

$\alpha = \frac{\pi}{4}$. ***V:*** $1 + \tan\alpha$; 2.

5) Lihtsusta avaldis: $\dfrac{[\sin(\pi-\alpha)-\cos(\pi+\alpha)]^2 - 1}{\sin\alpha\cdot\tan(\pi+\alpha)\cdot\cos(\pi-\alpha)+\cos^2(2\pi+\alpha)}$. ***V*** : $\tan 2\alpha$

6) *RE1998* On antud jooned $y = \sin x$ ja $y = \cos x$. Milliste x väärtuste korral lõigust $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ on nende joonte puutujad paralleelsed? (Leia sirgetega $x = 0$ ja $x = \frac{\pi}{2}$ ning antud joontega piiratud kujundi pindala- integraali ülesanne!). *V:* $x = -\frac{\pi}{4}$ ja $S = 2\sqrt{2} - 2$

7) *RE1999 (15p.)* Leia sin2α, kui cosα rahuldab võrrandit 25cos²α + 5cosα - 12 = 0 ja $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ***V:*** $-\frac{24}{25}$

8) *RE2000 RE1999 (15p.)* Rombi ühe tipu juures olev nurk α rahuldab tingimust $\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha = 2$. Leia rombi pindala, kui pikem diagonaal on 24. ***V:*** $96\sqrt{3}$

9) *RE2000* Kolmnurga ühe tipu juures olev nurk α rahuldab tingimust $\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha = 2$. Leia kolmnurga pindala, kui kolmnurga küljed on erineva pikkusega ja nurga α vastaskülg on 6 ning lähiskülg $6\sqrt{3}$. ***V:*** $18\sqrt{3}$.

10) *RE2000* On antud funktsioon $f(x) = \frac{2\cos x + 1}{\cos x}$, $x \in \left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$

Selgita, kas funktsioon *f*(*x*) on määratud lõigul $x \in \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$.

Leia vahemikus $x \in \left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$

a) funktsiooni *f*(*x*) nullkohad;

b) vahemikud, kus funktsioon *f*(*x*) on positiivne ja kus see on negatiivne;

c) funktsiooni *f*(*x*) kasvamis- ja kahanemisvahemikud;

d) funktsiooni *f*(*x*) maksimumpunkt.

Skitseeri funktsiooni *f*(*x*) graafik vahemikus $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$. *V: Ei ole määratud otspunktides;*

$a)x_1 = \frac{2\pi}{3}, x_2 = \frac{4\pi}{3}; b)X^+ = \left]\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right[, X^- = \left]\frac{\pi}{2};\frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{4\pi}{3};\frac{3\pi}{2}\right[;$

$c)X \uparrow = \left]\frac{\pi}{2};\pi\right[, X \downarrow = \left]\pi;\frac{3\pi}{2}\right[; d)P_{\max}(\pi;1).$

11) *Riigieksam2001 (20p.)* Lahenda võrrand cosx - sinx = 1, kui $x \in [-2\pi;2\pi]$
Leia parameetri b kõik väärtused, mille korral võrranditel cosx - sinx = 1 ja $\sin\frac{x}{2} = b$ leiduvad ühised lahendid, kui $x \in [-2\pi;2\pi]$. Leia funktsiooni y = $\sin\frac{x}{2}$ periood ja skitseeri selle funktsiooni graafik, kui $x \in [-2\pi;2\pi]$.

Skitseerige samale joonisele funktsiooni y = $|\sin\frac{x}{2}|$ graafik.

V: $1)\left\{-2\pi;-\frac{\pi}{2};0;\frac{3\pi}{2};2\pi\right\};2)0;\pm\frac{\sqrt{2}}{2};3)4\pi.$

12) *(Riigieksam2002 15p.)* Vaatleme funktsioone f(x) = cos2x ja g(x) = sinx.

a) Avalda cos2x suurus sinx kaudu.

b) Lõigul $[0;2\pi]$

(1) lahenda võrrand f(x) = g(x).

(2) joonesta ühes ja samas teljestikus funktsioonide f(x) ja g(x) graafikud. Leia joonise abil x väärtused, mille korral f(x) < g(x).

V: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$; $\left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2}\right\}$; $\left]\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right[$.

13) *Riigieksam 2003(15p.)* Antud on funktsioon f(x) = sin2x lõigul $[0; 2\pi]$.

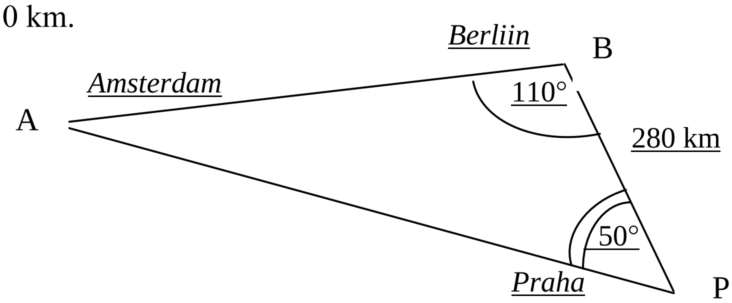
a) Lahenda võrrand f(x) = $\frac{1}{2}$.

b) Joonesta funktsiooni y = sin2x graafik ja kandke eelmises punktis leitud lahendid joonisele.

c) Kolmnurgas ABC olgu $\angle$C = 90º, $\angle$A = α ja AB = 2. Tõesta, et kolmnurga ABC pindala võrdub väärtusega f(α).

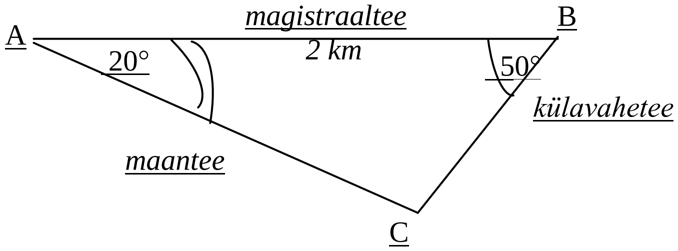
d) Leia nurk α nii, et eelmises punktis antud kolmnurga pindala väärtus on 1 .
V: $x \in \{15^\circ; 75^\circ; 195^\circ; 255^\circ\}; 45^\circ$.

14) *Riigieksam 2003(10p.)*
Amsterdam - Berliin - Praha moodustavad kolmnurga (vt. joonist), mille kaks nurka on 50° ja 110°. Kui kaugel on Amsterdam Berliinist ja Praha Amsterdamist? Vastused anna täpsusega 10 km.



V: 630 km ja 770 km.

15) *Riigieksam 2003(10p.)* Kolm teed – magistraaltee, maantee ja külavahetee moodustavad kolmnurga *ABC*, milles $\angle$A = 20° $\angle$B = 50° ja *AB* = 2 km (vt joonist). Kui pikk on teelõik *AC* ? Kell 12.00 pööras liikluseeskirjade rikkuja punktis *A* magistraalteelt maanteele ja jätkas sõitu kiirusega 140 *km/h* ristmiku *C* suunas. Samal ajal (kell 12.00) alustas punktist *B* sõitu mööda külavaheteed ristmiku *C* suunas politseiinspektor, kes jõudis kohale 35 sekundiga. Kas politseiinspektor jõudis ristmikule *C* enne liikluseeskirjade rikkujat? Põhjenduseks esitage arvutused.



V: AC on ligikaudu 1,63 km; kiiruseületaja 42 s.

16) *Riigieksam 2003(10p.)* Antud on funktsioon $f(x) = \cos 2x$ lõigul $[0;2\pi]$.

a) Lahenda võrrand $f(x) = \frac{1}{2}$

b) Joonesta funktsiooni $y = \sin 2x$ graafik ja kandke eelmises punktis leitud lahendid joonisele.

c) Kolmnurgas *ABC* olgu $\angle C$ = 90°, $\angle B = \beta$ ja *AB* = 1. Tõesta, et kolmnurga ABC kaatetite summa võrdub $\dfrac{f(\beta)}{\cos\beta - \sin\beta}$.

d) Leia nurk β nii, et eelmises punktis antud kolmnurga pindala väärtus oleks $\dfrac{1}{4}$.

V: $x \in \left\{\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right\}; \beta = 45^\circ$.

17) *Riigieksam 2004(15p.)* Antud on funktsioon f(x) = $\cos^4 x - \sin^4 x$.

a) Lihtsusta funktsiooni avaldist.

b) Arvutage f(α) täpne väärtus, kui sinα = $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

c) Määra, kas f(x) on paaris- või paaritu funktsioon.

d) Lahenda võrrand f(x) = 0 lõigul $[0;2\pi]$.

e) Joonesta ühes ja samas teljestikus funktsioonide y = cosx ja y = -cos2x graafikud lõigul $[0;2\pi]$.

V: $\cos 2x; \dfrac{3}{5};$ *paarisfunktsioon*; $x \in \{45^\circ; 135^\circ; 225^\circ; 315^\circ\}$.

18) *RE 2005(5p.)* Joonesta samas teljestikus funktsioonide y = sinx ja y = cosx graafikud. Määra lõigul $[\pi;2\pi]$ graafikute lõikepunkti koordinaadid. Põhjenda vastust. *V:* $L\left(\dfrac{5\pi}{4}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

19) *RE 2006(5p.)* Leia suuruse *a* väärtused, mille korral võrrandil cos *x* = 5*a* − 2 leidub lahend, mis kuulub lõiku $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$. V: $0{,}4 \le a \le 0{,}6$.

20) *RE 2007(10p.)* Antud on funktsioon *y* =2sin *x* lõigul $[0;2\pi]$.

1) Leia funktsiooni nullkohad ja muutumispiirkond.

2) Joonista funktsiooni graafik.

3) Kasutades saadud graafikut, leia

a) funktsiooni positiivsus- ja negatiivsuspiirkond;

b) argumendi *x* väärtused, mille korral *y* <-1.

V: $x \in \{0;;\pi;2\pi\}; X = [-2;2]; X^+ =]0;\pi[, X^- =]\pi;2\pi[; \left]\dfrac{7\pi}{6}; \dfrac{11\pi}{6}\right[$.

21) *RE 2008(10p.)* Kolmnurkse väljaku ühe külje pikkus on 20 m, selle külje lähisnurgad on 100° ja 27° ning kolmanda nurga tipus asetseb kolmnurga tasapinnaga ristuv lipumast. Lipumasti tipp paistab nürinurga tipust maapinna suhtes 47° nurga all. Arvutage väljaku pindala ja lipumasti kõrgus. *V: 112 m^2; 11,2 m.*

22) *RE 2008(15p.)*

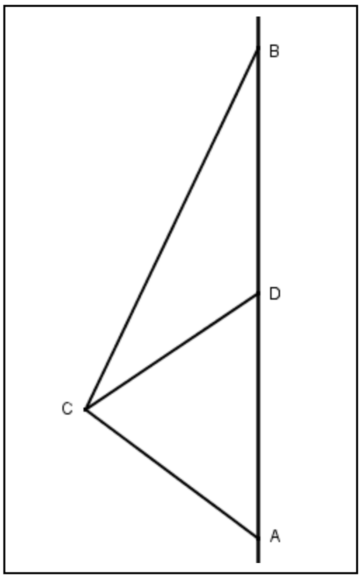
1) Lihtsusta avaldis cos 2*x* + sin 2*x* · tan *x* + cos *x* .

2) Joonesta funktsioonide *f*(*x*) = cos *x* ja *g*(*x*) = cos 2*x* graafikud lõigul $[0;2\pi]$ ühes ja samas teljestikus ning leidke graafikute lõikepunktide abstsissid.

3) Leia osa 2) joonise abil argumendi *x* väärtused lõigul $[0;2\pi]$, mille korral *g*(*x*) < *f*(*x*). *V:* $1 + \cos x; \left\{0; \dfrac{2\pi}{3}; \dfrac{4\pi}{3}; 2\pi\right\}; \left]0; \dfrac{2\pi}{3}\right[, \left]\dfrac{4\pi}{3}; 2\pi\right[$.

25) *RE 2009(10p.)* Sirge tee ääres asuvad talud *A, B* ja *D.* Iga talu juurest viib otsetee

postkontorisse *C* (vt joonist). Kulude kokkuhoiu eesmärgil otsustas vallavalitsus sulgeda liiklemiseks teed *AC* ja *BC* ning jätkata vaid teede *AB* ja *CD* hooldamist. Plaanil mõõtkavaga 1: 20 000 on tee *AB* pikkus 93 mm.
Teades, et teede *AD* ja *BD*
pikkus on võrdne ning $\angle CAB = 53°$ ja $\angle ABC = 25°$, leidke, mitme kilomeetri võrra
pikeneb teede sulgemise tõttu talude *A* ja *B* elanike teekond postkontorisse *C*?
Lõppvastus andke täpsusega 0,01 km.
V: A:0,91 km võrra ja B:0,19 km võrra.



26) *RE 2009(15p.)* On antud funktsioonid

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{5\pi}{6} - x\right)$$

ja $g(x) = \sin 2x$.
1) Näita, et $f(x) = -\cos x$.
2) Leia võrrandi $g(x) = -\cos x$ lahendid, mis asuvad lõigul $[0; 2\pi]$.
3) Joonesta ühes ja samas koordinaatteljestikus funktsioonide $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ graafikud ning lahendage joonise põhjal võrratus $f(x) > g(x)$ lõigul $[0; 2\pi]$.

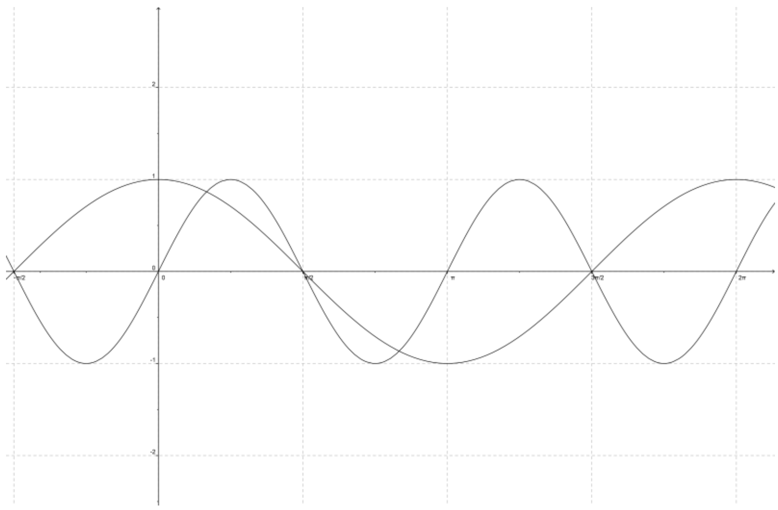
V: $x \in \left\{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right\}; x \in \left]\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}\right[$.

27) *RE 2010(10p.)* Rööpküliku *KLMN* diagonaal *LN* on 6,7 cm ja külg *LM* on 5,4 cm. Nurk *KNL* on $102°$.
1. Märgi andmed joonisele.
2. Arvuta rööpküliku *KLMN* ümbermõõt ja pindala.
3. Nurga *KNL* poolitaja lõikab rööpküliku külge *KL* punktis *T*.
Arvuta lõikude *KT* ja *TL* pikkused.
NB! Kõik lõppvastused ümarda kümnendikeni.

V: $P \approx 29{,}7cm; S \approx 35{,}4cm^2; KT \approx 4{,}2cm; TL \approx 5{,}2cm.$

28) *RE 2011(10p.)* Joonisel on funktsioonide f(x) = cos$x$ ja g(x) = sin2x graafikud lõigul [0; 2π].

1) Kirjuta joonisele funktsioonide nimetused
2) Lahenda võrrand cos$x$ = sin2x lõigul [0; 2π].
3) Joonesta samale joonisele funktsiooni h(x) = cos$x$ – 1 graafik lõigul [0; 2π].
4) Leia jooniselt kõigi kolme funktsiooni ühine negatiivsuspiirkond lõigul [0; 2π]



29) *RE 2011(15p.)* Kolm kaatrit kohtusid merel punktis *O*. Pärast kohtumist suundus esimene kaater põhja, teine ida ja kolmas lõuna suunas.

1) Kaks tundi pärast kohtumist olid kaatrid jõudnud vastavalt punktidesse *A*,*B* ja *C*, mis on täisnurkse kolmnurga *ABC* tippudeks. I ja II kaatri vaheline kaugus oli 60 km ning II kaatri kiirus oli 6 km/h võrra suurem I kaatri kiirusest. Leia I ja III kaatri vaheline kaugus 2 tundi pärast kohtumist.
2) I ja III kaater peatusid pärast 2-tunnist sõitu, II kaater jätkas liikumist samadel tingimustel veel ühe tunni ja jõudis punkti *D*. Leidke nurga *ADC* suurus.

V: $\approx 100\ km; 80^\circ 29'$

30) *RE 2012(20p.)*

a) Arvuta avaldise $\sin^2\alpha + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ täpne väärtus, kui $\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

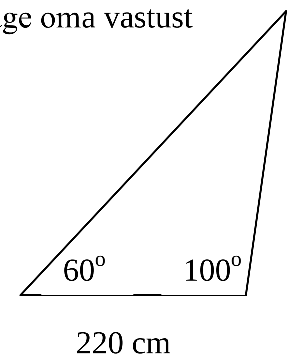
b) Leia funktsiooni $f(x) = x - 2\sin x + 4$ suurim ja vähim väärtus lõigul $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Leia parameetri a väärtused nii, et võrrandil $-4\sin^2 x = (a^2 + 9a + 4)\cdot \sin x$ oleks lõigul $[0; 2\pi]$ täpselt neli erinevat lahendit.

V: $1\frac{2}{9}; y_{\min} = \frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 4 \approx 3{,}3; y_{\max} = 4; a_1 = -1, a_2 = -8, a_3 = 0, a_1 = -9$.

31) *KT 2012* Seinale on riputatud suur Hiina lehvik. Lehvik on kujult ringi sektori kujuline, kesknurgaga 120^o ja raadiusega 30 cm. Leidke selle lehviku pindala. Vastus ümardage ühelisteni. *V:* 942 cm^2

32) *KT 2012* Omanik tahab tellida purjelaevale kolmnurkse purje. Leidke purje ümbermõõt ja pindala. Kas ristkülikukujulisest kangast mõõtmetega 2m x 10 m on võimalik valmistada selline puri (NB! Ilma õmblusteta)? Põhjendage oma vastust (näiteks tehke joonis). *V:* 14 m, 6 m^2, on võimalik.



33) *RE 2013 (15p)*

Maatükist ABCD, kus AB= 500 m, BC= 250m, AD= 300m, $\angle ABC = 90^{\circ}$, $\angle BAD = 120^{\circ}$ ja $\angle BCD = 90^{\circ}30'$, õnnestus müüa vaid kolmnurkne osa ABD.

- **a)** Tehke ülesande tekstile vastav joonis ja märkide andmed joonisele.
- **b)** Arvutage müüdud maatüki ümbermõõt.
- **c)** Mitu protsenti kogu maatükist jäi müümata? Lõppvastus ümardage kümnendikeni. *V:* P=1500 m; 55,6%.