KORDAMINE RIIGIEKSAMIKS IV
FUNKTSIOONID JA NENDE GRAAFIKUD. TULETISE RAKENDUSED.

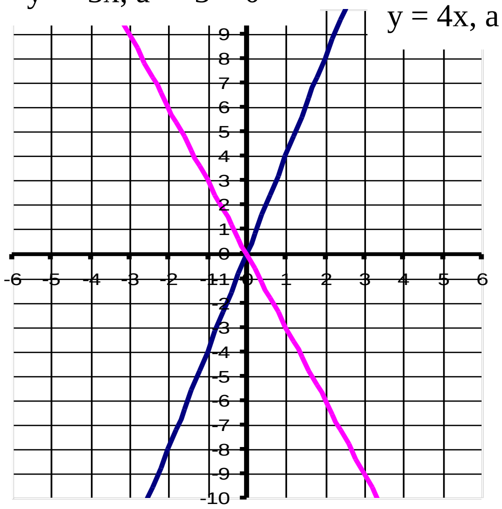
1. **Funktsiooni määramispiirkonna** (X) moodustavad argumendi (x) väärtused, mille korral funktsiooni väärtus (y) on eeskirjaga f(x) leitav.
2. **Funktsiooni muutumispiirkonna** (Y) moodustab funktsiooni väärtuste (f(x)) hulk.
3. Argumendi väärtuseid, mille korral funktsiooni väärtus on null, nimetatakse **funktsiooni nullkohtadeks** ja tähistatakse tavaliselt $X^0 = \{x_1; ...; x_n\}$. Funktsiooni y = f(x) nullkohtade leidmiseks tuleb lahendada võrrand f(x) = 0.
4. Argumendi kõigi selliste väärtuste hulka, mille korral funktsiooni väärtused on positiivsed (negatiivsed) nimetatakse vastavalt funktsiooni **positiivsuspiirkonnaks (negatiivsuspiirkonnaks)** ning tähistatakse X^+ (X^-). Funktsiooni y = f(x) positiivsuspiirkonna leidmiseks tuleb lahendada võrratus f(x) > 0 ning negatiivsuspiirkonna leidmiseks lahendada võrratus f(x) < 0.
5. Funktsiooni y = f(x) nimetatakse vahemikus $]a;b[$ **kasvavaks**, kui $x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$ ja vastavat vahemikku tähistatakse $X\uparrow$ ning kahanevaks, kui $x_2>x_1 \Rightarrow f(x_2)<f(x_1)$ ja tähistatakse sümboliga $X\downarrow$.
6. Argumendi väärtust, mille korral funktsioon saavutab oma suurima (vähima) väärtuse, nimetatakse funktsiooni **ekstreemumkohtadeks** (maksimum- ja miinimumkohad) ja tähistatakse X_e.
7. y = f(x) **on paarisfunktsioon**, kui f(-x) = f(x). Paarisfunktsiooni graafik on alati sümmeetriline y -telje suhtes. y = f(x) **on paaritu funktsioon**, kui f(-x) = - f(x). Paaritu funktsiooni graafik on alati sümmeetriline sirge y = x suhtes
8. Funktsioon y = f(x) on **perioodiline funktsioon**, kui F(x + T) = f(x), kus T on funktsiooni periood

1) Võrdeline seos avaldub valemina y = ax, kus võrdetegur $a \neq 0$.
Võrdelise seose omadus: üks positiivne suurus sõltub teisest võrdeliselt, kui ühe suuruse kasvamisel (kahanemisel) mingi arv korda teine suurus
kasvab(kahaneb) sama arv korda. Võrdelise seose graafikuks on sirge, mis läbib koordinaatide alguspunkti. Kui võrdetegur a > 0, siis graafik läbib koordinaattasandi I ja III veerandit, kui a < 0, siis paikneb graafik II ja IV veerandis.

Näide.

y = -3x, a = -3 < 0

y = 4x, a = 4 > 0

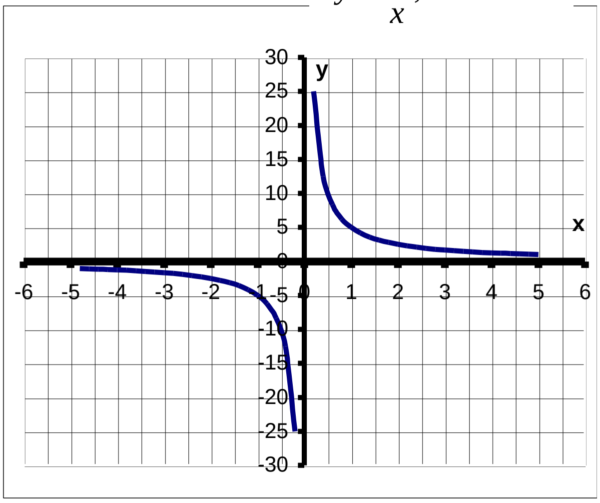


2) Pöördvõrdeline seos $y = \frac{a}{x}$, *kus* $a \in R$ *ja* $a \neq 0$.

Pöördvõrdelise seose omadus: üks positiivne suurus sõltub teisest pöördvõrdeliselt, kui ühe suuruse kasvamisel (kahanemisel) mingi arv korda teine suurus kahaneb (kasvab) sama arv korda. Pöördvõrdelise sõltuvuse graafikuks on hüperbool, mille harud asuvad I ja III veerandis, kui a > 0 ning II ja IV veerandis, kui a < 0.

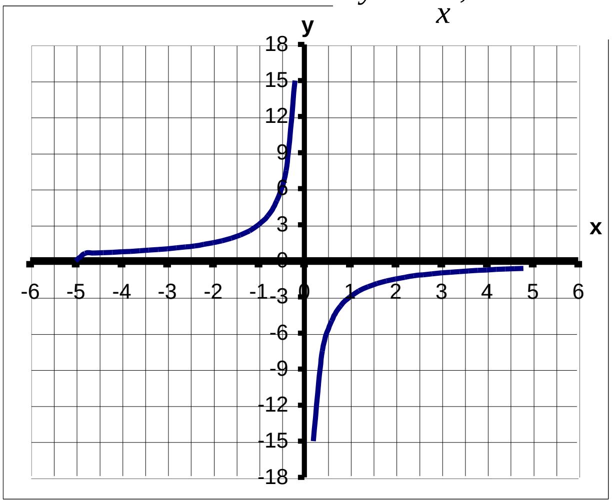
Näide.

$y = \frac{5}{x}$, a =5 > 0



$X = R \setminus \{0\}$
$Y = R \setminus \{0\}$
$X^0 = \varnothing$
$X^+ =]0;\infty[$
$X^- =]-\infty;0[$
$X\uparrow = \varnothing$
$X\downarrow = X$
$X_e = \varnothing$

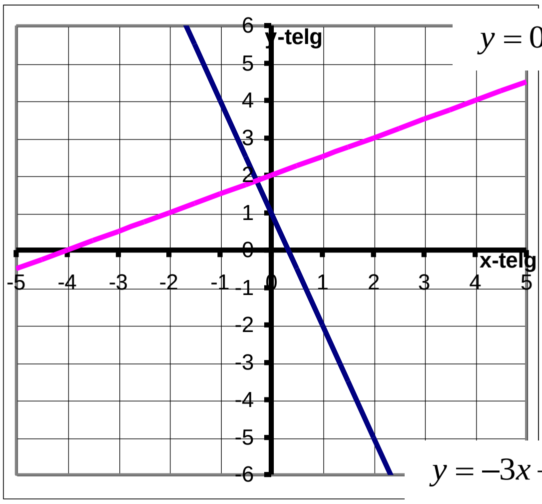
$y = -\frac{3}{x}$, a = -3 < 0



$X = R \setminus \{0\}$
$Y = R \setminus \{0\}$
$X^0 = \varnothing$
$X^+ =]-\infty;0[$
$X^- =]0;\infty[$
$X\uparrow = X$
$X\downarrow = \varnothing$
$X_e = \varnothing$

3) Lineaarfunktsioon avaldub kujul **y = ax + b** , kus a ja b on mistahes arvud ja a ≠ 0. Kui vabaliige b = 0 siis saame võrdelise seose y = ax. Lineaarfunktsiooni graafikuks on sirge. Vabaliige b on sirge algordinaat, st. sirge lõikab y-telge punktis (0; b). Lineaarliikme kordaja a on sirge tõus. Kui a > 0, siis on tegemist tõusva sirgega ja kui a < 0, siis langeva sirgega.

Näide.



$y = 0{,}5x + 2$

$y = -3x + 1$

Funktsioon $y = 0{,}5x + 2$
$X = R$
$Y = R$
$X^0 = \{-4\}$
$X^+ =]-4;\infty[$
$X^- =]-\infty;-4[$
$X\uparrow = \mathrm{R}$
$X\downarrow = \varnothing$
$X_e = \varnothing$

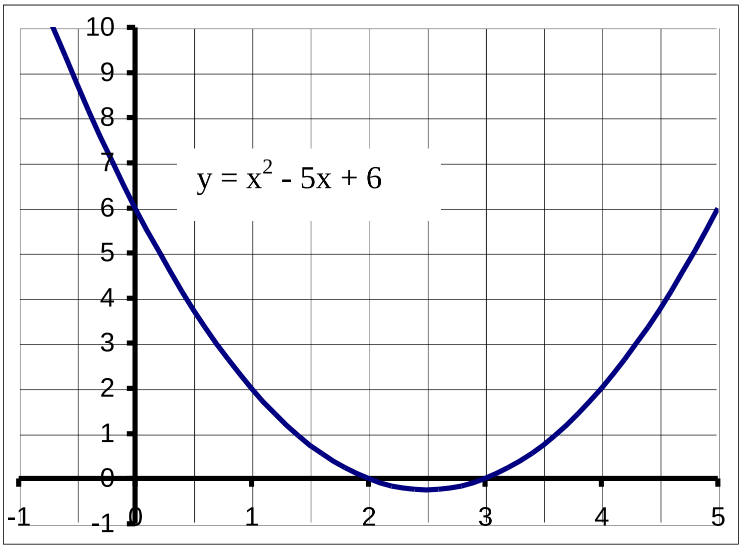
4) Ruutfunktsioon avaldub kujul $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$, kus a, b ja c on mistahes arvud ja $a \neq 0$. Ruutfunktsiooni $y = ax^2 + bx + c$ graafikuks on parabool. Kui $a > 0$, siis parabooli harud avanevad üles, kui $a < 0$, siis alla. Parabooli sümmeetriatelge nimetatakse parabooli teljeks ja punkti, kus parabool lõikub oma teljega nimetatakse parabooli haripunktiks.

Parabooli skitseerimiseks tuleb leida nullkohad (võrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid) ja haripunkt (haripunkti abstsissi leiame kas nullkohtade aritmeetilise keskmisena $\frac{x_1 + x_2}{2}$ või valemist $x_h = -\frac{b}{2a}$; ordinaadi leidmiseks paneme abstsissi väärtuse funktsiooni avaldisse ning leiame y väärtuse või kasutame valemit $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$). Parabooli haripunkt on ka tema ekstreemumpunktiks.

Parabool läbib y-telge punktis (0 ; c). Vajadusel arvutame veel lisapunkte juurde.

Näide. Joonestage ruutfunktsiooni $y = x^2 - 5x + 6$ graafik ning uurige funktsiooni. Graafik avaneb ülespoole, kuna ruutliikme kordaja on positiivne.

Graafiku skitseerimiseks leiame esmalt nullkohad, st. ruutvõrrandi $x^2 - 5x + 6 = 0$ lahendid. Viete´i teorremi põhjal saame $x_1 = 2$ ja $x_2 = 3$. Graafiku haripunkti leiame nullkohtade aritmeetilise keskmisena: $x_h = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$ ja $y_h = 2{,}5^2 - 5 \cdot 2{,}5 + 6 = -0{,}25$ ehk H(2,5; -0,25).



Parabool läbib y-telge punktis (0 ; 6).

$X = R$

$Y = [-0{,}25; \infty[$

$X^0 = \{2;\ 3\}$

$X^+ =]-\infty, 2[\cup]3; \infty[$

$X^- =]2; 3[$

$X \uparrow =]2{,}5; \infty[$

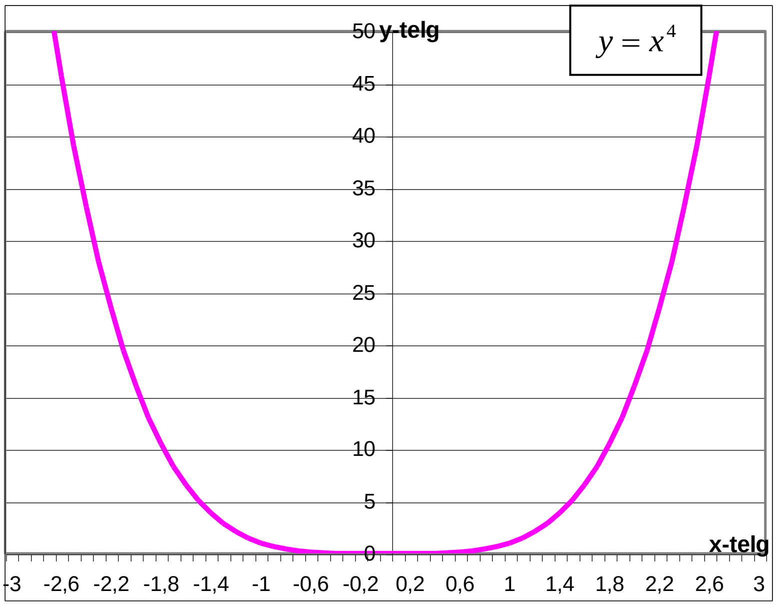
$X \downarrow =]-\infty; 2{,}5[$

$P_{\min}(2{,}5; -0{,}25)$ (haripunkt on antud juhul ka miinimumpunktiks)

5) Astmefunktsioon avaldub kujul $y = x^n,\ n \in Z,\ n \neq 0$

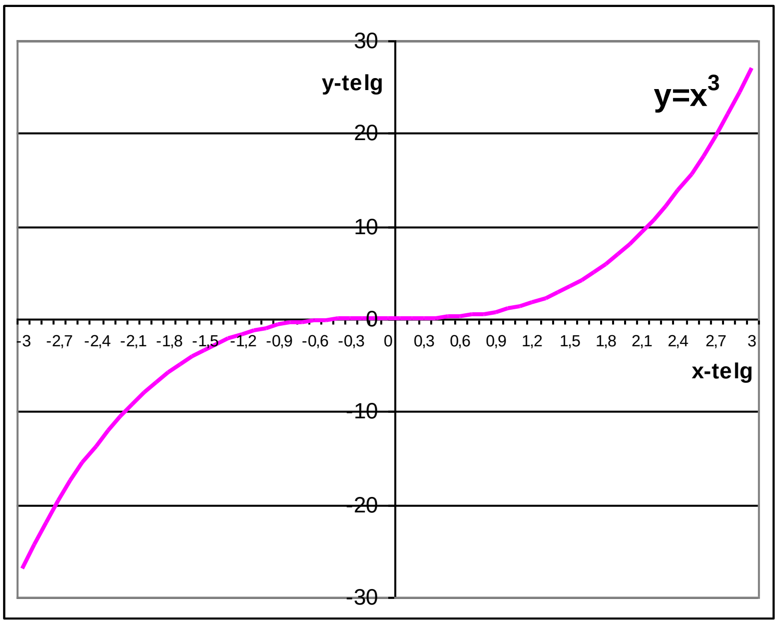
Näide.

a) $y = x^{2n},\ n \in N$



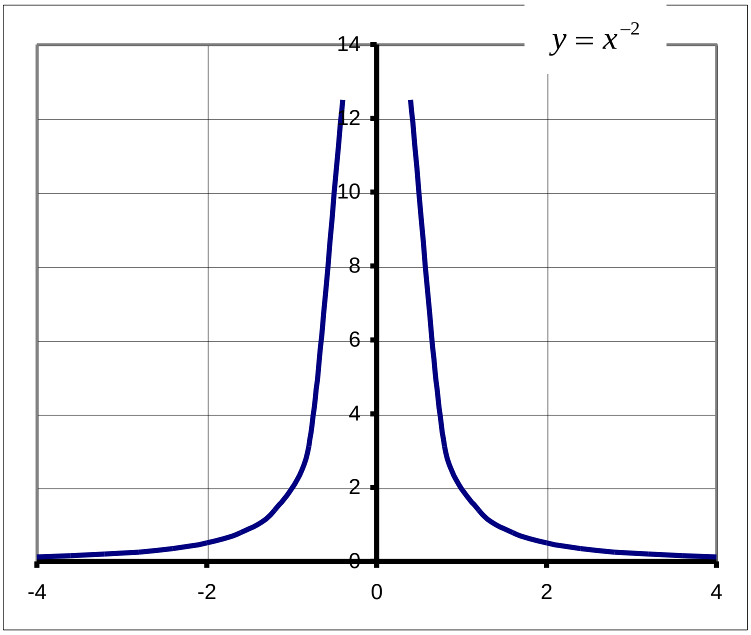
$X = R$
$Y = [0;\infty[$
$X^0 = \{0\}$
$X^+ =]0;\infty[$
$X^- = \varnothing$
$X\uparrow =]0;\infty[$
$X\downarrow =]-\infty;0[$
$P_{\min}(0;0)$

b) $y = x^{2n+1},\ n \in N$



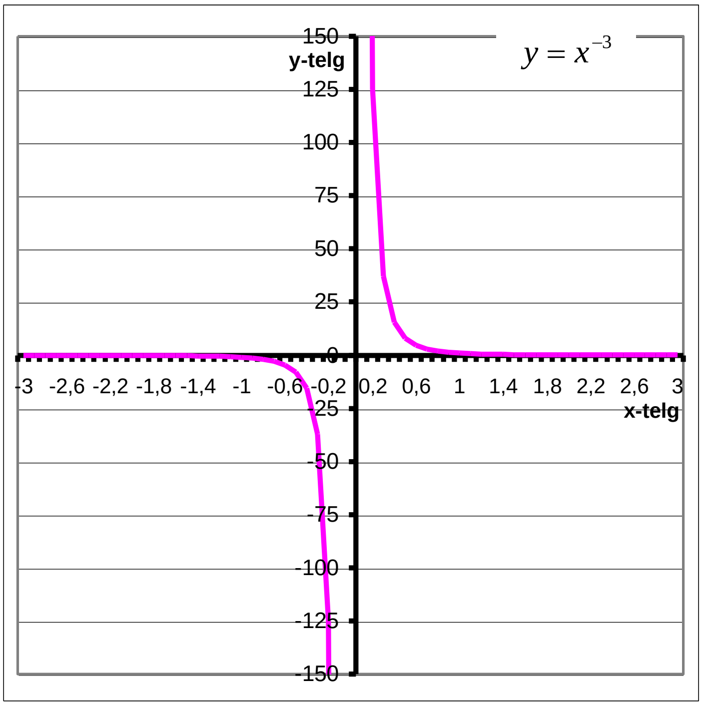
$X = R$
$Y = R$
$X^0 = \{0\}$
$X^+ =]0;\infty[$
$X^- =]-\infty;0[$
$X\uparrow = R$
$X\downarrow = \varnothing$
Ekstreemumpunktid puuduvad

c) $y = x^{-2n}, n \in N$



$X = R \setminus \{0\}$
$Y =]0;\infty[$
$X^0 = \varnothing$
$X^+ =]0;\infty[$
$X^- = \varnothing$
$X \uparrow =]-\infty;0[$
$X \downarrow =]0;\infty[$
Ekstreemumpunktid puuduvad

d) $y = x^{-(2n+1)}, n \in N$

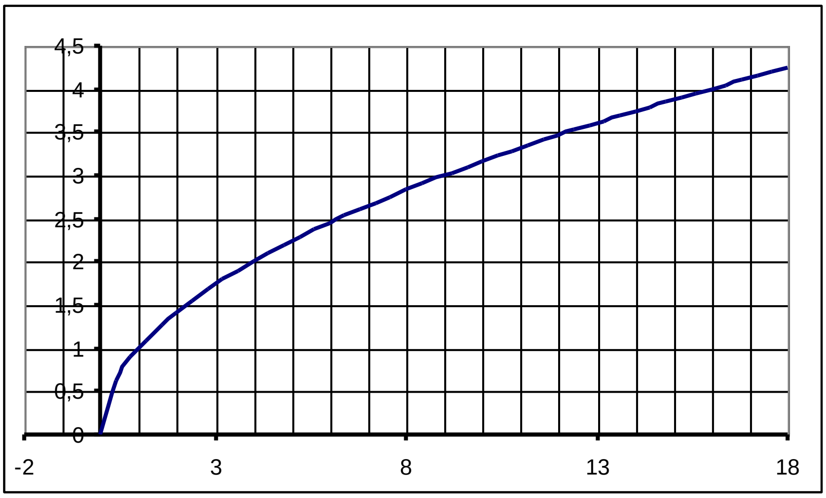


$X = R \setminus \{0\}$
$Y = R \setminus \{0\}$
$X^0 = \varnothing$
$X^+ =]0;\infty[$
$X^- =]-\infty;0[$
$X \uparrow = \varnothing$
$X \downarrow = X$
Ekstreemumpunktid puuduvad

6) Juurfunktsioonid

Näide.

a) $y = \sqrt{x},\ x \geq 0$



$X = [0;\infty[$

$Y = [0;\infty[$

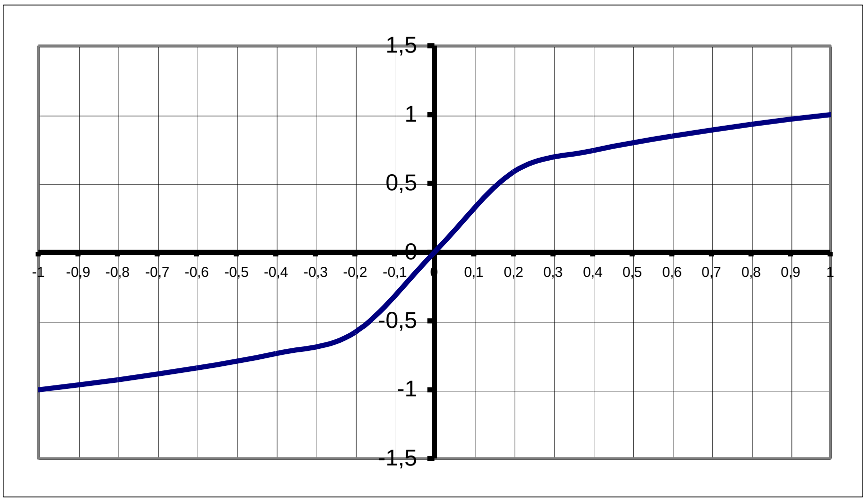
$X^0 = \{0\}$

$X^+ =]0;\infty[\ ;\ X^- = \varnothing$

$X \uparrow = \mathrm{X};\ X \downarrow = \varnothing$

Ekstreemumpuntid puuduvad

b) $y = \sqrt[3]{x}$



$X = R$

$Y = R$

$X^0 = \{0\}$

$X^+ =]0;\infty[;\quad X^- =]-\infty;0[$

$X \uparrow = R\ ;\quad X \downarrow = \varnothing$

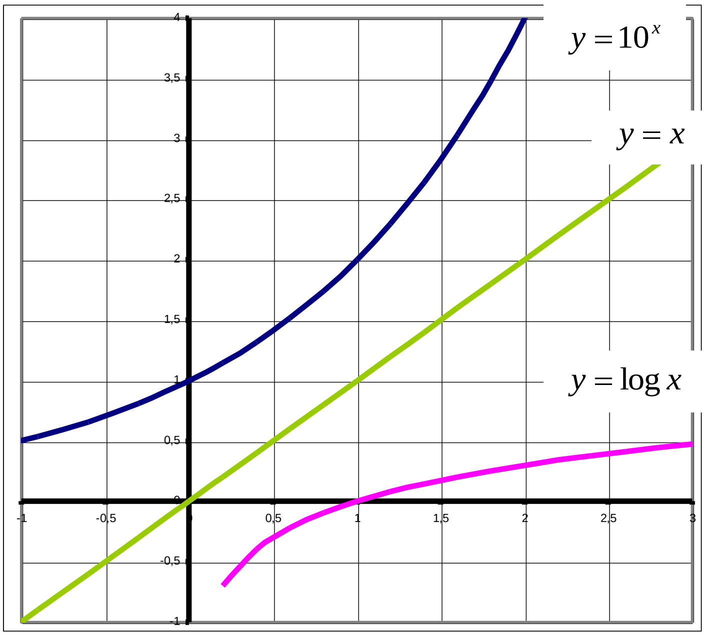
Ekstreemumpunktid puuduvad

7) Eksponentfunktsioon avaldub kujul $\mathbf{y = a^x}$ **,** kus a > 0 ja a ≠ 1.

8) Logaritmfunktsioon avaldub kujul $\mathbf{y = \log_a x}$ **,** kus a > 0 ja a ≠ 1, x > 0.

Näide.

a) a > 1



Funktsioon $\mathbf{y = a^x}$

$X = R$

$Y =]0;\infty[$

$X^0 = \varnothing$

$X^+ = R;\ X^- = \varnothing$

$X\uparrow = R;\ X\downarrow = \varnothing$

Ekstreemumpunktid puuduvad.

Funktsioon $\mathbf{y = \log_a x}$.

$X =]0;\infty[$

$Y = R$

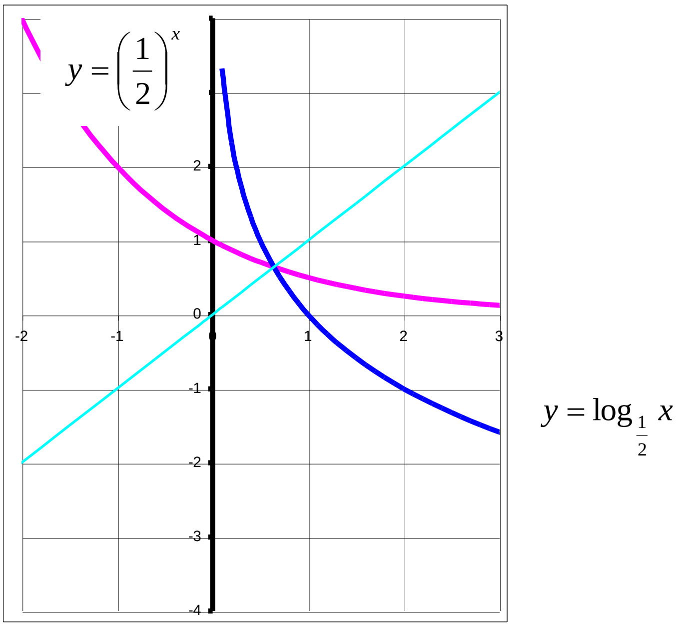
$X^0 = \{1\}$

$X^+ =]1;\infty[;\ X^- =]0;1[$

$X\uparrow = X;\ X\downarrow = \varnothing$

Ekstreemumpunktid puuduvad.

b) 0 < a < 1



Funktsioon $\mathbf{y = a^x}$

$X = R$

$Y =]0;\infty[$

$X^0 = \varnothing$

$X^+ = R;\ X^- = \varnothing$

$X\uparrow = \varnothing;\ X\downarrow = R$

Ekstreemumpunktid puuduvad.

Funktsioon $\mathbf{y = \log_a x}$.

$X =]0;\infty[$

$Y = R$

$X^0 = \{1\}$

$X^+ =]0;1[;\ X^- =]1;\infty[$

$X\uparrow = \varnothing;\ X\downarrow = X$

Ekstreemumpunktid puuduvad.

Funktsioonid $y = a^x$ ja $y = \log_a x$ on teineteise pöördfunktsioonid. Kui $f(x) = a^x$, siis $f^{-1}(x) = \log_a(x)$ ja kui $f(x) = \log_a(x)$, siis $f^{-1}(x) = a^x$

Funktsiooni y = f(x) pöördfunktsiooni leidmiseks vahetame x ja y , st x = g(y). Saadud tulemusest avaldame y – i. Pöördfunktsiooni määramispiirkonnaks on antud funktsiooni muutumispiirkond ja muutumispiirkonnaks antud funktsiooni määramispiirkond. Funktsioonide y = f(x) ja x = g(y) graafikud on sümmeetrilised funktsiooni y = x graafiku suhtes.

Funktsiooni tuletis ja selle rakendused.

1) Olulisemate tuletiste tabel

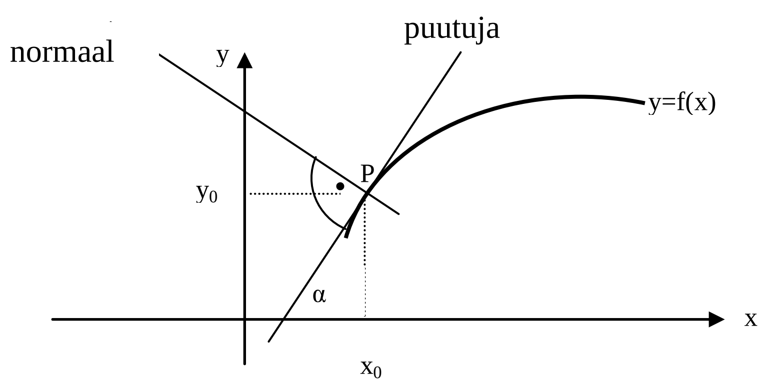
$c' = 0$	$(a^x)' = a^x \ln a$	$(e^x)' = e^x$
$x' = 1$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Liitfunktsiooni tuletis $F'(x) = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$, kui $F = f(u)$ ja $u = g(x)$
Funktsioonide summa, vahe, korrutise ja jagatise tuletis

- **a)** $(u + v)' = u' + v'$
- **b)** $(u - v)' = u' - v'$
- **c)** $(c \cdot u)' = c \cdot u'$
- **d)** $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$
- **e)** $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' u}{v^2}$

2) **Puutuja võrrand** $y - y_o = f'(x_o) \cdot (x - x_o)$, kus puutuja tõus $k = f'(x)$ ja puutepunkt on $P(x_0; y_0)$.

3) **Normaali võrrand** $y - y_o = -\frac{1}{f'(x_o)} \cdot (x - x_o)$, kus puutuja normaali tõus on $-\frac{1}{f'(x)}$ ja normaal läbib punkti $P(x_0; y_0)$.



4) Diferentseeruva funktsiooni uurimine

1) määramispiirkond (X)
2) muutumispiirkond (Y)
3) nullkohad $\{x | f(x) = 0\}$
4) positiivsuspiirkond $\{x | f(x) > 0\}$
5) negatiivsuspiirkond $\{x | f(x) < 0\}$
6) kasvamisvahenikud $\{x | f'(x) > 0\}$
7) kahanemisvahemikud $\{x | f'(x) < 0\}$
8) funktsiooni ekstreemumumid

a) maksimumkoht $\begin{cases} f'(x_{max}) = 0 \\ f''(x_{max}) < 0 \end{cases}$ ehk

x	x < x_{max}	x_{max}	x > x_{max}
f´(x)	+	0	-

b) miinimumkoht $\begin{cases} f'(x_{min}) = 0 \\ f''(x_{min}) > 0 \end{cases}$ ehk

x	x < x_{max}	x_{max}	x > x_{max}
f´(x)	-	0	+

c) funktsiooni maksimum $y_{max} = f(x_{max})$

d) funktsiooni miinimum $y_{min} = f(x_{min})$

9) funktsiooni perioodilisus $f(x+T) = f(x)$, kus T on funktsiooni periood

10) paarisfunktsioon ($f(-x) = f(x)$) või paaritufunktsioon ($f(-x) = -f(x)$)

5) Ekstreemumülesanneteks nimetatakse ülesandeid, mis taanduvad mingi suuruse suurima või vähima väärtuse leidmisele. Tuletame meelde, et funktsiooni suurimat (vähimat) väärtust leidsime funktsiooni tuletise abil.

6) Pea meeles! Leides funktsiooni suurimat ja vähimat väärtust lõigul tuleb kontrollida ka funktsiooni väärtusi lõigu otspunktides.

NÄITEÜLESANDED

1) Jaota arv 284 kaheks arvuks nii, et nende korrutis oleks suurim.

Lahendus.

Tähistame arvu 284 osad x ja 284 – x. Nende arvude korrutis on $f(x) = x(284 - x) = 284x - x^2$.
Leiame saadud funktsiooni tuletise $f'(x) = 284 - 2x$
Ekstreemumkoha leidmiseks lahendame võrrandi 284 – 2x = 0 ⇒ x = 142.
Kontrollime, kas on tegemist maksimumiga. Selleks võib kasutada abijoonist või leiame teise tuletise
$f''(x) = (284 - 2x)' = -2 < 0$.
Seega on arvu 284 osad 142 ja 284 – 142 = 142.
Vastus. Arv 284 tuleks jagada võrdseteks osadeks:142 ja 142, siis on nende korrutis suurim.

2) Jaota arv 30 kaheks arvuks nii, et nende ruutude summa oleks vähim.

<u>*Lahendus.*</u>
Tähistame arvu 30 osad x ja 30 – x. Nende ruutude summa on

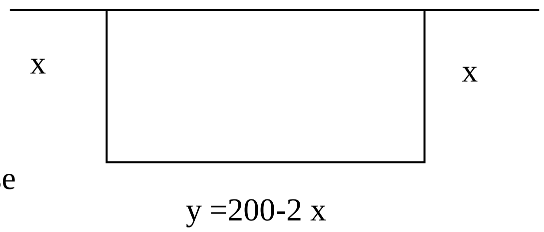
$$f(x) = x^2 + (30 - x)^2 = x^2 + 900 - 60x + x^2 = 2x^2 - 60x + 900.$$

Leiame saadud funktsiooni tuletise $f'(x) = 4x - 60$.
Ekstreemumkoha leidmiseks lahendame võrrandi
4x - 60= 0 $\Rightarrow x = 15$
Kontrollime, kas on tegemist miinimumiga. Selleks leiame teise tuletise

$$f''(x) = (4x - 60)' = 4 > 0.$$

Seega tuleks arv 30 jagada võrdseteks osadeks 15 ja 15.
Vastus. Arv 30 tuleb jaotada osadeks 15 ja 15, siis on nende ruutude summa vähim.

3) *Riigieksam 1999 (15p.)* **Müüri ääres tuleb kolmest küljest piirata taraga maksimaalse pindalaga ristkülikukujuline maatükk. Leia maatüki mõõtmed, kui tara pikkus peab olema 200 m.**
Lahendus.
Olgu maatüki kaks külge x (m) ja kolmas külg 200 – 2x (m) (nagu joonisel tähistatud).



Leiame maatüki pindala

$$S(x) = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$$

Ekstreemumi leidmiseks leiame tuletise

$$S'(x) = 200 - 4x$$

ja lahendame võrrandi

$$200 - 4x = 0 \Rightarrow x = 50.$$

Maksimumi kontrollimiseks leiame teise tuletise

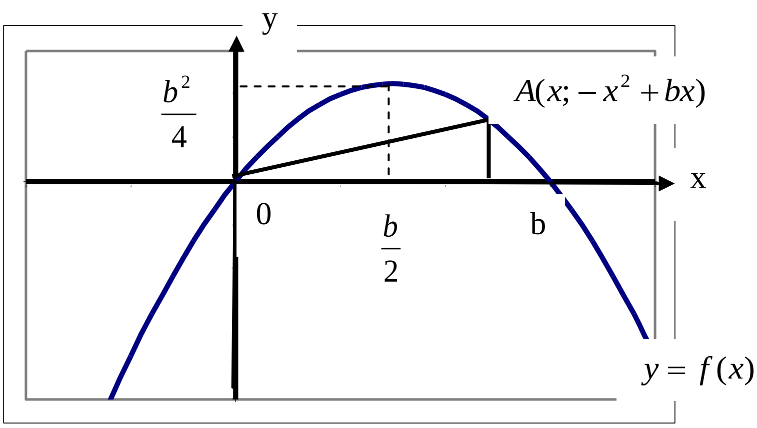
$$S''(x) = (200 - 4x)' = -4 < 0.$$

Leiame nüüd maatüki pikema külje y = 200 – 2·50 = 100 (m).
Vastus. Maatüki mõõtmed on 50 m ja 100m.

4) *Riigieksam 2003(20p.)* **On antud funktsioonid $f(x) = -x^2 + bx$ ($b > 0$) ja $g(x) =$** $3^x + 3^{3-x} - 28$
a)Joonestage *x*-teljega ja joonega $y = f(x)$ piiratud kujund ning selle sisse täisnurkne kolmnurk, mille üks tipp on koordinaatide alguses, üks kaatet *x*-teljel ja selle vastastipp joonel $y = f(x)$. Leidke selle kolmnurga maksimaalne võimalik pindala.
b)Leidke funktsiooni $g(x)$ nullkohad.
c)Määrake arv *b* nii, et funktsiooni $f(x)$ nullkohad ühtiksid $g(x)$ nullkohtadega. Arvutage saadud *b* väärtusel punktis a) leitud kolmnurga pindala.
<u>*Lahendus.*</u>

a) Funktsiooni $f(x) = -x^2 + bx$ nullkohad on $x_1 = 0$ ja $x_2 = b$ ning haripunkti abtsiss $x = \dfrac{b}{2}$

ja ordinaat $y = -\dfrac{b^2}{4} + \dfrac{b^2}{2} = \dfrac{b^2}{4}$. Skitseerime graafiku ja kolmnurga.



Avaldame kolmnurga pindala. Tähistame x-teljel asuva kaadeti x-ga ning siis on teine kaatet $-x^2 + bx$, kuna punkt A asub paraboolil.

$$S(x) = \frac{x(-x^2 + bx)}{2} = -\frac{x^3}{2} + \frac{bx^2}{2}.$$

Ekstreemumi leidmiseks leiame tuletise

$$S'(x) = -\frac{3x^2}{2} + \frac{2bx}{2} = -1{,}5x^2 + bx$$

ja lahendame võrrandi

$$-1{,}5x \quad + bx = 0 \Rightarrow x\left(-1{,}5x^2 + b\right) = 0$$

$x_1 = 0$ *ei sobi*

$$-1{,}5x + b = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3}b$$

Kontrollime, kas $x_2 = \dfrac{2}{3}b$ annab maksimaalse pindala.

Leiame teise tuletise

$$S''(x) = -3x + b \Rightarrow S''\left(\frac{2b}{3}\right) = -2b + b = -b < 0$$

, st. on maksimumkoht, kuna $b > 0$.

Leiame teise kaateti

$$-\frac{4b^2}{9} + \frac{2b^2}{3} = \frac{2b^2}{9}.$$

Pindala

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{2b}{3} \cdot \frac{2b^2}{9} = \frac{2b^3}{27}$$ (üh²)

Vastus: Selle kolmnurga maksimaalne võimalik pindala on $\dfrac{2b^3}{27}$ üh².

b) Leiame funktsiooni $g(x) = 3^x + 3^{3-x} - 28$ nullkohad.

$$3^x + 3^{3-x} - 28 = 0 \Rightarrow 3^x + \frac{27}{3^x} - 28 = 0$$

Teeme muutuja vahetuse a = 3^x

$$a + \frac{27}{a} - 28 = 0 \Big| \cdot a \neq 0 \Rightarrow a^2 - 28a + 27 = 0$$

Viete´i teoreemi põhjal saame lahenditeks

$a_1 = 27 \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow x_1 = 3$

$a_2 = 1 \Rightarrow 3^x = 1 \Rightarrow x_2 = 0$

Vastus. Funktsiooni g(x) nullkohad on 3 ja 0.

c) Funktsioonide nullkohad

	nullkohad	nullkohad
f(x)	0	b
g(x)	0	3

Järelikult b = 3 ja pindala $S = \frac{2b^3}{27} = \frac{2 \cdot 3^3}{27} = 2$ üh²

5) Leia järgmiste funktsioonide määramispiirkonnad.

$a)\ y = \frac{3x+1}{x-2}$

$b)\ y = \sqrt{-x^2 + 4}$

$c)\ y = \sqrt{\frac{2x-3}{x+21}}$

$d)\ y = \ln\left(x^2 - 1\right)$

Lahendus.

a) Funktsiooni $y = \frac{3x+1}{x-2}$ väärtuse leidmisel peab olema võimalik

Leidajagatis $\frac{3x+1}{x-2}$. See on võimalik, kui x - 2 $\neq$ 0 $\Rightarrow$ x $\neq$ 2, kõik ülejäänud reaalarvud kuuluvad määramispiirkonda.

Vastus: X = $\left]-\infty;2\right[\cup \left]2;\infty\right[$ ehk X = R\ {2}

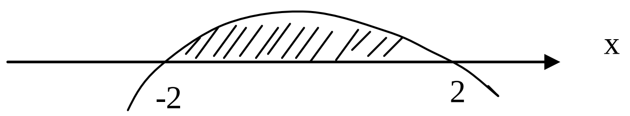
b) Funktsiooni y = $\sqrt{-x^2 + 4}$ määramispiirkonna moodustavad argumendi väärtused, mille korral: $-x^2 + 4 \geq 0$. Leiame nullkohad:

$$-x^2 + 4 = 0 \Rightarrow -x^2 = -4 \Big| \cdot (-1) \Rightarrow x^2 = 4$$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

Kanname nullkohad arvteljele.



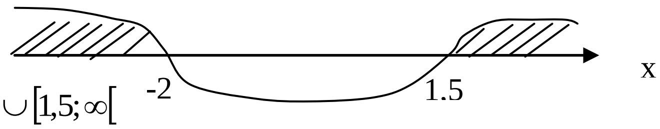
Vastus.

$X = [-2; 2]$

c) Funktsiooni $y = \sqrt{\dfrac{2x-3}{x+2}}$ määramispiirkonna leidmiseks lahendame võrratuse:

$$\frac{2x-3}{x+2} \geq 0 \Rightarrow (2x-3)(x+2) \geq 0 \wedge x+2 \neq 0$$

Nullkohad : 2x-3 = 0, x_1 = 1,5; x + 2 = 0, x_2 = -2. Kanname nullkohad arvteljele.



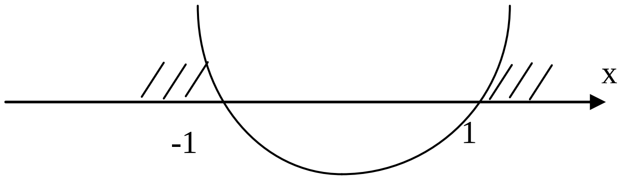
Vastus. $X =]-\infty; -2[\cup [1{,}5; \infty[$

d) Funktsiooni $y = \ln(x^2 - 1)$ määramispiirkonna leidmiseks lahendame võrratuse $x^2 - 1 > 0$, sest logaritmitav peab olema positiivne. Leiame avaldise nullkohad ja kanname need arvteljele.

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$

$x_1 = 1$

$x_2 = -1$



Vastus $X =]-\infty; -1[\cup]1; \infty[$.

6) On antud funktsioon y = x^3-9x.

a) Leidke f(-4), |f(-4)|, f(a), f(x + a) – f(a).

b) Näidake, et f(x) = x^3-9x on paaritu funktsioon.

c) Leidke funktsiooni nullkohad, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad.

Lahendus

a) Leiame f (-4) = $(-4)^3$-9(-4) = -64 + 36 = -28.

(1) |f(-4) = |-28| = 28.

(2) f(a) = a^3-9a.

(3) f(x +a) - f(a) = $(x+a)^3$-9(x +a) – (a^3 - 9a) =
= $x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$ - 9x - 9a- a^3 +9a = $x^3 + 3x^2a + 3xa^2$ - 9x – 9a =
= $x^3 + 3ax^2 + 3(a^2 - 3)$ x – 9a

b) f(- x) = $(-x)^3$ - 9(- x) = - x^3 + 9x = - (x^3 -9x) = - f (x).

c) Funktsiooni f(x) = x^3-9x nullkohtade leidmiseks lahendame võrrandi

x^3-9x = 0

Tegurdame võrrandi vasaku poole

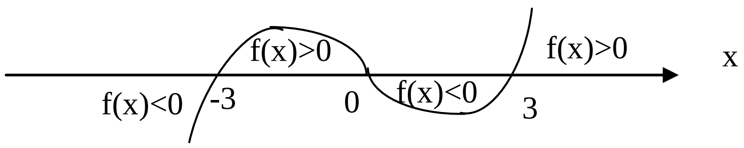
x(x^2 - 9) = 0,

$x_1 = 0$,

$$x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3,$$

$x_2 = 3$, $x_3 = 3$.

Positiivsuspiirkonna leidmiseks lahendame võrratuse $f(x) = x^3 - 9x > 0$. Kasutame eelmises punktis leitud nullkohti, millised kanname arvteljele.



Seega funktsiooni positiivsuspiirkond on $]-3;0[\cup]3;\infty[$. Negatiivsuspiirkonna leidmiseks lahendame võrratuse $f(x) = x^3 - 9x < 0$. Vastuse loeme samalt jooniselt. Funktsiooni negatiivsuspiirkond on $]-\infty;-3[\cup]0;3[$

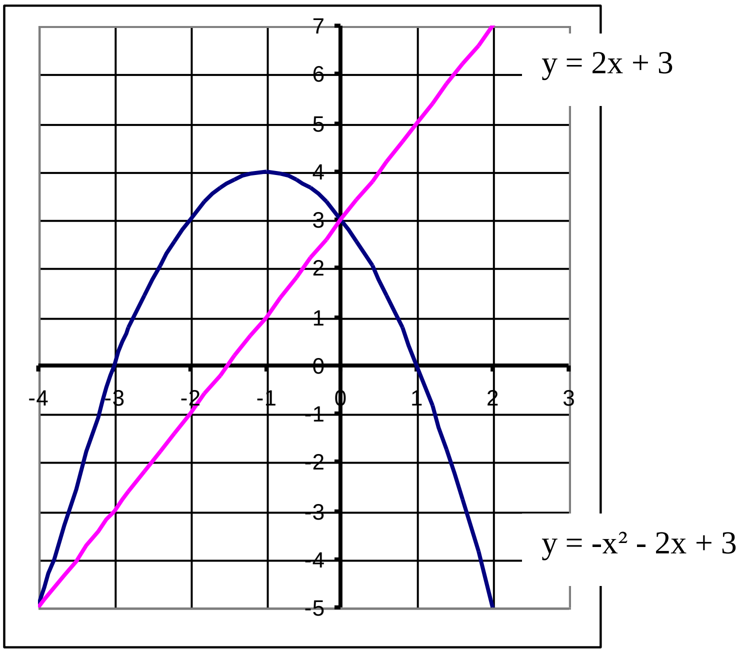
7) *Riigieksam 2001 (5p).* **Joonisel on funktsiooni y = -x² - 2x + 3 graafik.**

a) Joonestage samale joonisele funktsiooni y = 2x +3 graafik

b) Määrake täiendatud joonise põhjal

- ***(1)*** **kummagi funktsiooni nullkohad;**
- ***(2)*** **piirkond, milles ruutfunktsioon kasvab**
- ***(3)*** **ruutfunktsiooni suurim väärtus**
- **(4) piirkond, kus mõlemad funktsioonid on positiivsed**

Lahendus.



Lineaarfunktsiooni graafiku joonestamiseks määrame kaks punkti

x	0	-1,5
y	3	0

Või kasutane tõusu (a = 2) ja algordinaati (b =3). Parabooli skitseerimist vaatlesime lk. 70.

Leiame vastused:

Funktsiooni $y = -x^2 - 2x + 3$ nullkohad on {-3; 1} ning funktsiooni $y = 2x + 3$ nullkohad {-1,5}. Ruutfunktsioon kasvab vahemikus $]-\infty;-1[$ ning tema suurim väärtus on $y_{max} = 4$. Mõlemad funktsioonid on samaaegselt positiivsed piirkonnas $]-1,5;1[$.

8) Joonestage ühes ja samas teljestikus funktsioonide f(x) = |x – 2| ja g(x) = 3x-6 graafikud ning leidke piirkond, kus samaaegselt f(x) > 0 ja g(x) < 0.

Lahendus.

Absoluutväärtuse definitsioonist saame

$$y = f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2, kui\ x \geq 2 \\ -x+2, kui\ x < 2 \end{cases}$$

Joonestame sirged kahe punkti abil. Kui f(x) = x - 2 ja x ≥ 2, siis

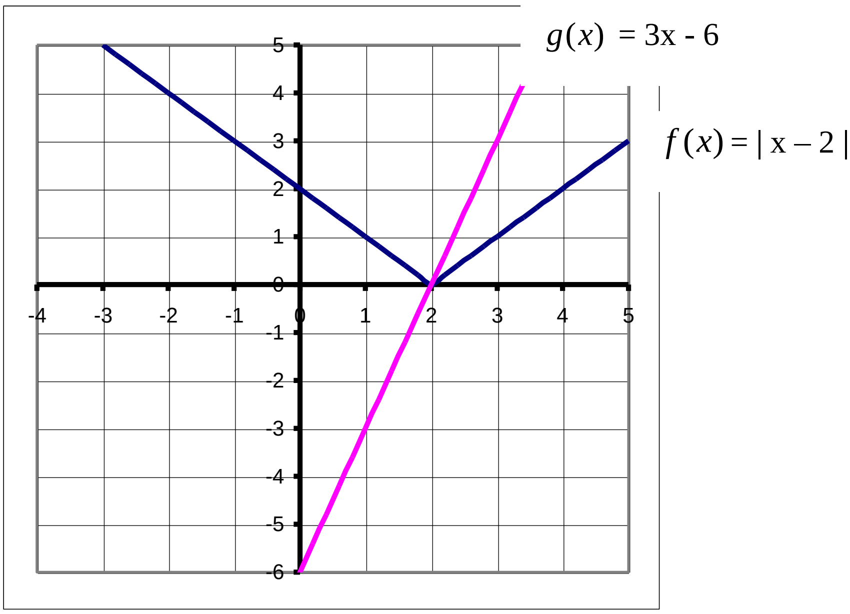
Kui f(x) = -x + 2 ja x < 2, siis

x	0	2
$y = f(x)$	-2	0

Kui g(x) = 3x – 6, siis graafikuks vajalikud punktid saame

x	0	2
$y = g(x)$	-6	0

Joonestame antud funktsioonide graafikud.



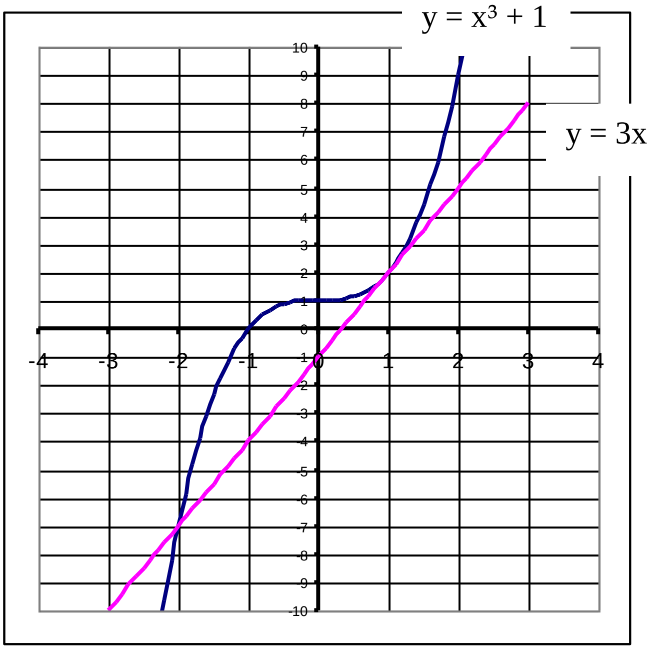
Vastus. Jooniselt leiame, et samaaegselt on f(x) >0 ja g(x) < 0, kui x < 2.

9) Leida joone y = x^3 +1 puutuja võrrand punktis, mille abstsiss on 1. Tee joonis.

Lahendus.

Leiame esmalt puutpunkti koordinaadid. Teame, et x = 1 ⇒ y = 1^3 + 1 = 2. Saime puutepunktiks P(1; 2).

Järgmisena leiame puutujasirge tõusu k . Kuna $k = f'(x_\circ)$, siis leiame esmalt tuletise $y' = f'(x) = 3x^2$ ja $k = f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$.
Koostame puutuja võrrandi $y - 2 = 3(x-1) \Rightarrow y = 3x - 1$.
Skitseerime joone ja selle puutuja graafikud.



10) Millises punktis on paraboolil $y = x^2 + 4x$ x-teljega paralleelne puutuja?

Lahendus.

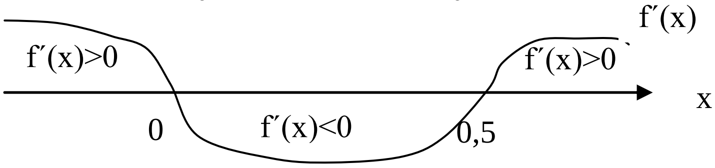
Selleks, et puutuja oleks paralleelene x- teljega peab tema tõus olema o, st. k = 0.
Kuna $k = y' = 2x + 4$, siis saame võrrandi $2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2$.
Leiame nüüd puutepunkti ordinaadi $y = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) = -4$.
Saime puutepunktiks P(-2; -4).
Vastus. Paraboolil $y = x^2 + 4x$ on x-teljega paralleelne puutuja punktis P(-2; -4).

11) *Riigieksam 1997 (10p.)* **Leidke funktsiooni $y = 4x^3 - 3x^2$**

- **a) maksimum- ja miinimumkohad;**
- **b) kasvamis- ja kahanemisvahemikud.**

Lahendus.

Leiame funktsiooni tuletise $f'(x) = y' = 12x^2 - 6x$.
Leiame tuletise nullkohad $12x^2 - 6x = 0 \Rightarrow 6x(2x - 1) = 0$
$6x = 0 \Rightarrow x_1 = 0$
$2x - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0{,}5$
Kasvamisvahemiku leidmiseks lahendame võrratuse $12x^2 - 6x > 0$.
Kahanemisvahemiku leidmiseks lahendame võrratuse $12x^2 - 6x < 0$.
Märgime nullkohad ja skitseerimetuletisjoone.



Leiame jooniselt kasvamis- ja kahanemisvahemikud
$X_1 \uparrow = \left]-\infty;0\right[$ *ja* $X_2 \uparrow = \left]0{,}5;\infty\right[$ *ning* $X \downarrow = \left]0;0{,}5\right[$.
Jooniselt näeme, et kohal $x_1 = 0$ läheb kasvamine üle kahanemiseks, seega on tegemist maksimumkohaga ning kohal $x_2 = 0{,}5$ asendub funktsiooni kahanemine kasvamisega, seega on tegemist miinimumkohaga.

Vastus. Funktsiooni $y = 4x^3 - 3x^2$ ekstreemumkohad on $x_{max} = 0$ ja $x_{min} = 0{,}5$. Kasvamis- ja kahanemisvahemikud on vastavalt $X_1 \uparrow = \left]-\infty;0\right[$ *ja* $X_2 = \uparrow \left]0{,}5;\infty\right[$ *ning* $X \downarrow = \left]0;0{,}5\right[$.

12) *Riigieksam 2000 (15p.)* **On antud funktsioon f(x) = xlnx – xln5.**

a) Leidke funktsiooni

(1) määramispiirkond

(2) graafiku ja x- telje lõikepunkt

(3) miinimumpunkti abtsiss.

b) Koostage joone y = f(x) puutuja võrrand punktis, kus joon lõikab x- telge.

<u>*Lahendus.*</u>

Kuna logaritmitav peab olema positiivne, siis saame määramispiirkonnaks $X = \left]0;\infty\right[$.
Leiame graafiku ja x- telje lõikepunkti, st. punkti, kus y = 0. Saame võrrandi
xlnx – xln5 = 0 $\Rightarrow$ x(lnx – ln5) = 0 $\Rightarrow x_1 = 0$ on võõrlahend, kuna ei kuulu määramispiirkonda ja teisest tegurist saame lnx = ln5 $\Rightarrow$ $x_2 = 5$.
Graafiku ja x- telje lõikepunktiks on P(5; 0).
Leiame miinimumpunkti abtsissi. Selleks leiame funktsiooni tuletise

$f'(x) = (x\ln x - x\ln 5)' = \ln x + \frac{1}{x}\cdot x - \ln 5$

Ekstreemumkoha leidmiseks lahendame võrrandi $\ln x + \frac{1}{x}\cdot x - \ln 5 = 0$

$\Rightarrow \ln x + 1 - \ln 5 = 0 \Rightarrow \ln x + \ln e - \ln 5 = 0 \Rightarrow \ln x = \ln 5 - \ln e \Rightarrow \quad x = \frac{5}{e}$.

Kontrollime, kas tegemist on miinimumkohaga. Selleks leiame teise tuletise.

$f''(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f\left(\frac{5}{e}\right) = \frac{e}{5} > 0$.

Saime miinimumpunkti abtsissiks $x = \frac{5}{e}$.

Joone puutuja leidmiseks leiame esmalt puutuja tõusu.

$k = f'(x) = (x\ln x - x\ln 5)' = \ln x + \frac{1}{x}\cdot x - \ln 5 \Rightarrow$ Kuna joon lõikab x- telge punktis P(5; 0), siis $k = f'(5) = \ln 5 + 1 - \ln 5 = 1$.
Koostame puutuja võrrandi $y - 0 = 1(x-5) \Rightarrow y = x - 5$.
Vastus. Määramispiirkonnaks on $X = \left]0;\infty\right[$. Graafiku ja x- telje lõikepunktiks on P(5; 0).
Miinimumpunkti abtsissiks on $x = \frac{5}{e}$. Joone puutuja võrrandi on $y = x - 5$.

13) *Riigieksam2001 (15p).* **Antud on funktsioon** $y = \ln\frac{x}{e^x} - x^2$.

a) Leidke funktsiooni määramispiirkond
b) Lihtsustage funktsiooni avaldist, kasutades logaritmi omadusi
c) Leidke funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud
d) Arvutage funktsiooni maksimumpunkti koordinaadid.

Lahendus.

a) Funktsiooni määramispiirkonna leidmiseks lahendame võrratuse $\frac{x}{e^x} > 0$.

Kuna $e^x > 0$, siis saame võrratuse lahendiks x > 0 $\Rightarrow X =]0;\infty[$.

b) Lihtsustame avaldist kasutades logaritmi omadust

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, b > 0, c >0 ning teades, et ln e = 1 $\Rightarrow$

$$\ln\frac{x}{e^x} - x^2 = \ln x - \ln e^x - x^2 = \ln x - x\ln e - x^2 = \ln x - x - x^2.$$

c) Kasvamisvahemiku leidmiseks lahendame võrratuse y′ = f′(x) > 0.
Kahanemisvahemiku leidmiseks lahendame võrratuse y′ = f′(x) < 0.
Leiame tuletise eelmises punktis saadud lihtsustatud avaldisest

f′(x) = y′ = $\frac{1}{x} - 1 - 2x$. Leiame tuletise nullkohad ning skitseerime tuletisjoone võrratuste lahendamiseks.

$$\frac{1}{x} - 1 - 2x = 0 \Rightarrow \frac{1 - x - 2x^2}{x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + x - 1 = 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

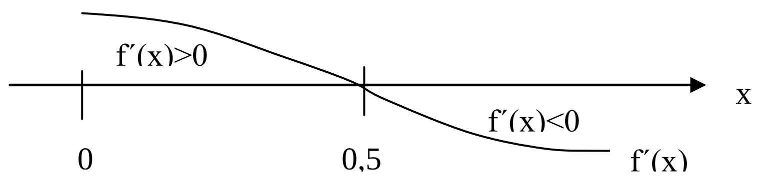
Lahendame murru lugejas oleva võrrandi $2x^2 + x - 1 = 0$

D = 1 + 8 = 9

$$x = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = 0{,}5$$

$x_2 = -1$ *on võõrlahend, kuna ei kuulu määramispiirkonda*



Arvestades, et funktsiooni määramispiirkond $X =]0;\infty[$, siis saame kasvamis ja kahanemisvahemikeks vastavalt $X\uparrow =]0;0{,}5[$ *ning* $X\downarrow =]0{,}5;\infty[$.

d) Kuna kohal x = 0,5 läheb funktsiooni kasvamine üle kahanemiseks, siis on see maksimumkohaks ning

$$y = f(0{,}5) = \ln\frac{0{,}5}{e^{0{,}5}} - 0{,}5^2 = \ln 2^{-1} - 0{,}5 - 0{,}5^2 = -0{,}75 - \ln 2 \approx -1{,}44.$$

Funktsiooni maksimumpunkt on P_{max}(0,5; -ln2-0,75).

14) *Riigieksam 2002 (15p.)* **Antud on funktsioon y = $\frac{1}{3}$x³ - 4x.**

a) Leidke funktsiooni tuletis.

b) Leidke funktsioni kasvamis- ja kahanemisvahemikud.
c) Leidke funktsiooni graafiku maksimum- ja miinimumpunkti koordinaadid.
d) Leidke funktsiooni graafiku puutuja tõus miinimumpunktis.
e) Joonestage funktsiooni graafik ja sellele puutuja miinimumpunktis

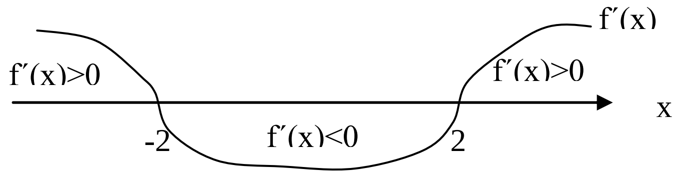
<u>*Lahendus.*</u>

Leiame tuletise $y' = 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 - 4x = x^2 - 4$.

Kasvamis ja kahanemisvahemike jaoks tuleb lahendada võrratused $y' = x^2 - 4 > 0$ ja $y' = x^2 - 4 < 0$. Võrratuste lahendamiseks leiame tuletisavaldise nullkohad.

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_1 = -2 \; ja \; x_2 = 2$.

Märgime punktid x-teljele ja skitseerime tuletisjoone.



Jooniselt näeme, et funktsiooni kasvamisvahemikud on $X_1 \uparrow = \left]-\infty; -2\right[\; ja \; X_2 \uparrow = \left]2; \infty\right[$.
Funktsioon on kahanev vahemikus $\left]-2; 2\right[$.

Kohal $x_1 = -2$ on funktsiooni maksimum, kuna kasvamine asendub kahanemisega ja kohal $x_2 = 2$ minimum, kuna kahanemine läheb üle kasvamiseks. Leiame nüüd funktsiooni graafiku maksimum- ja miinimumpunkti koordinaadid.

Kui $x_{max} = -2 \;\Rightarrow y_{max} = \frac{1}{3} \cdot \left(-2^3\right) - 4 \cdot (-2) = 5\frac{1}{3} \Rightarrow P_{max}\left(-2; 5\frac{1}{3}\right)$

Kui $x_{min} = 2 \;\Rightarrow y_{min} = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - 4 \cdot 2 = -5\frac{1}{3} \Rightarrow P_{min}\left(2; -5\frac{1}{3}\right)$

Leiame funktsiooni graafiku puutuja tõusu punktis $P_{min}\left(2; -5\frac{1}{3}\right)$. Puutuja tõus on

$k = y' = f'(x_\circ) \; ja \; y' = x^2 - 4 \Rightarrow k = f'(2) = 2^2 - 4 = 0$. Seega k = 0, st. puutuja on paralleelne x-teljega ja puutujavõrrandiks on $y = -5\frac{1}{3}$.

Joonestame nüüd funktsiooni $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$ graafiku.Leiame nullkohad võrrandist

$\frac{1}{3}x^3 - 4x = 0$

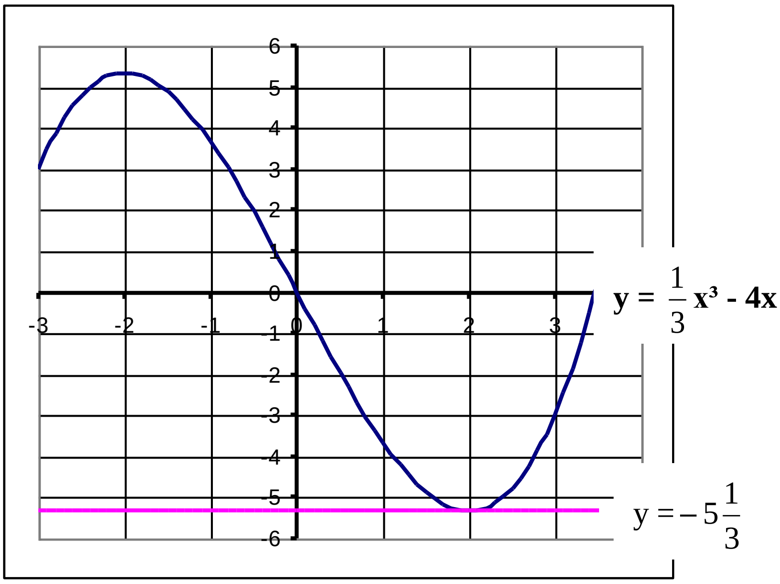
$x\left(\frac{1}{3}x^2 - 4\right) = 0$

$x_1 = 0$

$\frac{1}{3}x^2 - 4 = 0 \,|\cdot 3$

$x^2 = 12$

$x = \pm 2\sqrt{3} \approx \pm 3{,}5$



Vastus. Funktsiooni tuletiseks on $y' = x^2 - 4$. Funktsiooni kasvamisvahemikud on $]-\infty;-2[$ *ja* $]2;\infty[$ ning funktsioon on kahanev vahemikus $]-2;2[$. Maksimum- ja miinimumpunkti koordinaadid on $P_{\max}\left(-2;5\frac{1}{3}\right)$ ning $P_{\min}\left(2;-5\frac{1}{3}\right)$. Funktsiooni graafiku puutuja tõus miinimumpunktis on 0.

ÜLESANDED

Leidke funktsioonide määramispiirkonnad.

a) $y = \sqrt{5-x} + \dfrac{2}{\sqrt{2x-4}}$

b) $y = \dfrac{1-x}{x^2 - x - 6}$

c) $\sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x}}$

d) $y = \sqrt{(x-2)(x^2+x)}$

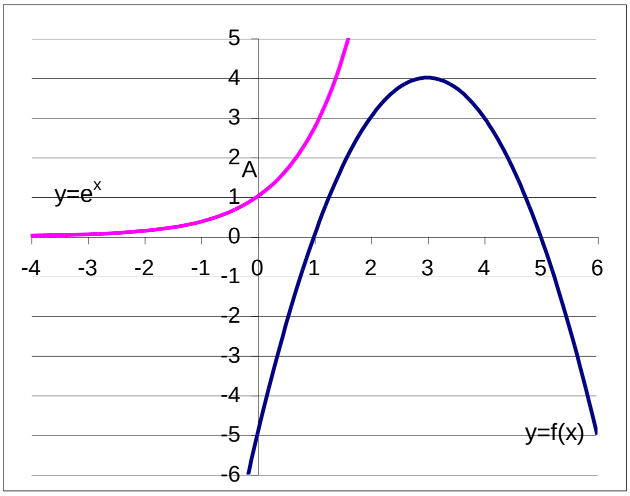
e) $\log_4 \dfrac{-x+6}{x-2}$

f) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\log(x^2-9x+15)}} + \dfrac{1}{x^2-64}$

V: $]2;5]$; $]-\infty;-2[\cup]-2;3[\cup]3;\infty[$; $[2;\infty[$; $[-1;0]\cup[2;\infty[$; $]2;6[$; $]-\infty;2[\cup]7;\infty[\setminus\{-8;8\}$.

2) *Riigieksam 1997(10p.)* Joonisel on antud ruutfunktsiooni y = f(x) ja funktsiooni $y = e^x$ graafikud. Leidke

(1) ruutfunktsiooni y = f(x) valem
(2) punkti A koordinaadid
(3) ruutfunktsiooni nullkohad ja haripunkt
(4) $y = e^x$ väärtus kohal, mis vastab funktsiooni y = f(x) absoluutväärtuselt vähimale nullkohale.
(5) ühised positiivsuspiirkonnad.



V: $y = -x^2 + 6x - 5$; A(0;1); $X_0=\{1; 5\}$; H(3;4); e; $X^+ =]1;5[$

3) *Riigieksam 1997.*Leia funktsiooni $y = 4x^3 - 3x^2$

a) max ja min kohad,

b) kasvamis- ja kahanemispiirkonnad. ***V:*** $x_{max}= 0$; $x_{min}= 0,5$;

$X_1 \uparrow =]-\infty;0[, X_2 \uparrow =]0,5;\infty[; X \downarrow =]0;0,5[$.

4) *Riigieksam 1997* Leia funktsiooni $y = x^3 - 4x^2 - 3x - 2$ kasvamis – ja kahanemisvahemikud, maksimum ja miinimumkohad.

V: $X_1 \uparrow = \left(-\infty;-\frac{1}{3}\right), X_2 \uparrow = (3;\infty),\ X \downarrow = \left(-\frac{1}{3};3\right), x_{max} = -\frac{1}{3}, x_{min} = 3$

5) *Riigieksam 1998.* On antud funktsioon $f(x) = x^2 - 2\ln x + 3$

a) leia $f\left(e^{\frac{1}{2}}\right)$

b) antud funktsiooni kasvamispiirkond

c) antud funktsiooni ekstreemumid

d) lahenda võrrand f(x) = g(x), kus $g(x) = x^2 + \ln^2 x$

V: e + 2; $X \uparrow =]1;\infty[$; E(1;4); $x_1 = \frac{1}{e^3}$; $x_2 = e$

6) *Riigieksam 1998.* On antud funktsioon f(x) = sinx - cosx

a) lihtsusta f(x) · f(-x)

b) lahenda võrrand f(x) = 1

c) leia f(x) > 0 lõigus $[0;\pi]$

d) leia antud funktsiooni miinimumkoht vahemikus $]0;2\pi[$ ja arvuta funktsiooni väärtus sellel kohal.

V: cos2x; $x_1 = \frac{\pi}{2}(4n+1)$; $x_2 = \pi(2n+1)$, $n \in Z$; $\left]\frac{\pi}{4};\pi\right[$; $E_{min}\left(\frac{7\pi}{4};-\sqrt{2}\right)$.

7) Millise muutuja x väärtuse korral saavutab $f(x) = 2\cdot 8^x - 9\cdot 4^x + 12\cdot 2^x + 1997$ oma suurima väärtuse lõigul $[-1;1]$? Leida need funktsiooni väärtused.

V: f(0)= 2002.

8) Olgu x_1 ja x_2 vastavalt funktsiooni $f(x) = x^3 - 6ax^2 + 9a^2x + 1997$ min ja max kohad. Milliste parameetri a väärtuste korral kehtib võrdus $x_1^2 = x_2 + 10$?

V: $-2 \ ja \ 1\frac{1}{9}$.

9) Leia funktsiooni $f(x) = px^2 - 9x + q$ ekstreemumpunktid, kui $f(-3) = 28$ ja $f(1) = -32$. ***V:*** $E_{min}(1,5; -32,75)$.

10) Leia funktsiooni $f(x) = 2x^3 + 1-3x(x + 4)$ minimaalne ja maksimaalne väärtus lõigus $[-3;3]$.
V: $y_{max}= 8$; $x_{max}= -1$, $y_{min}= -44$, $x_{min}= -3$.

11) *Riigieksam 1999.On antud funktsioon $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 11$.*

a) Leia selle funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

b) Leia selle funktsiooni suurim väärtus lõigul $[0;5]$. ***V:***

$X_1 \uparrow = \left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$, $X_2 \uparrow =]3;\infty[$; $X \downarrow = \left]\frac{1}{3};3\right[$, y = 4.

12) *Riigieksam 1999.Antud on funktsioonid $f(x) = e^x$ ja $g(x) = 3$.*

a) Skitseeri ühes ja samas teljestikus nende funktsioonide graafikud.

b) Leia

1. millistes punktides on nende funktsioonide väärtused võrdsed?
2. milliste argumendi x väärtuste korral on funktsiooni f(x) väärtused väiksemad g(x) väärtustest?
3. funktsiooni f(x) väärtus, kui $x = \ln \cos\frac{\pi}{6}$. ***V:*** (ln3; 3); x < ln3; $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13) *Riigieksam 1999.*Antud on funktsioonid f(x) = lnx ja g(x) = -2.

a) Skitseeri ühes ja samas teljestikus nende funktsioonide graafikud.

b) Leia

1. millistes punktides on nende funktsioonide väärtused võrdsed?
2. milliste argumendi x väärtuste korral on funktsiooni f(x) väärtused suuremad g(x) väärtustest?
3. funktsiooni f(x) väärtus, kui $x=e^{\sin\frac{\pi}{3}}$. ***V:*** $(e^{-2}; -2)$; $x > e^{-2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

14) Leia funktsiooni $f(x) = \log_{1/2}(x^2 - 7x + 10)$ määramispiirkond, positiivsus- ja negatiivsuspiirkonnad. Arvuta f(10) - f(7). Lahenda võrrand $9^{1+f(x)} + 8\cdot 3^{f(x)} - 1 = 0$.

V: $X =]-\infty;2[\cup]5;\infty[$; $X^- =]-\infty;3,5-\sqrt{3,25}[\cup]3,5+\sqrt{3,25};\infty[$;
$X^+ =]3,5-\sqrt{3,25};2[\cup]5;3,5+\sqrt{3,25}[$; -2; $x_1 = 1$ ja $x_2 = 6$.

15) Leia vahemikus $\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right)$ nurgad, mille korral funktsiooni y=$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x}$ tuletis on -2.

V: 135º, 225º.

16) *Riigieksam 2000.* On antud funktsioon f(x) = xlnx – xln5.

a) Leia funktsiooni

1. määramispiirkond
2. graafiku ja x- telje lõikepunkt
3. miinimumpunkti abtsiss.

b) Koosta joone y = f(x) puutuja võrrand punktis, kus joon lõikab x- telge.

V: $X =]0;\infty[$; $P(5;0)$; $x_{min} = \frac{5}{e}$; $y = x - 5$.

17) *Riigieksam 2001*. Joonisel on funktsiooni y = -x² - 2x + 3 graafik.

a) Joonesta samale joonisele funktsiooni y = 2x +3 graafik

b) Määra täiendatud joonise põhjal

1. kummagi funktsiooni nullkohad ja piirkond, milles ruutfunktsioon kasvab

2. ruutfunktsiooni suurim väärtus

3. piirkond, kus mõlemad funktsioonid on positiivsed.

V: $x=-1{,}5; x_1=-3, x_2=1; X\uparrow=\left]-\infty;-1\right[; y_{\max}=4; \left]-1{,}5;1\right[.$

18) *Riigieksam 2001.* Antud on funktsioon $y=\ln\dfrac{x}{e^x}-x^2$.

a) Leia funktsiooni määramispiirkond

b) Lihtsusta funktsiooni avaldist, kasutades logaritmi omadusi

c) Leia funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud

d) Arvuta funktsiooni maksimumpunkti koordinaadid.

V: $X=\left]0;\infty\right[; \ln x-x-x^2; x\downarrow=\left]0{,}5;\infty\right[, X\uparrow=\left]0;0{,}5\right[; P_{\max}\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{4}-\ln 2\right).$

19) *Riigieksam 2002.* Antud on funktsioon y = x^3 – $3x^2$.

a) Leia funktsiooni tuletis.

b) Leia funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

c) Leia funktsiooni maksimum- ja miinimumpunkti koordinaadid.

d) Leia funktsiooni graafikule joonestatud puutuja tõus punktis, mille abtsiss on 3.

e) Skitseeri funktsiooni graafik. Joonesta funktsiooni graafiku puutuja punktis, mille abtsiss on 3. ***V:*** $y' = 3x^2 - 6x$, $X_1\uparrow=(-\infty;0), X_2\uparrow=(2;\infty), X\downarrow=(0;2), P_{\max}(0;0), P_{\min}(2;-4)$, k=9.

20) *Riigieksam 2002.* Vaatleme funktsiooni f(x) = 2sinx – 1 lõigul $[0;2\pi]$.

a) Lahenda võrrand f(x) = 0.

b) Moodusta avaldis f(π - x) + f(π + x) ja lihtsusta seda.

c) joonesta ühes ja samas teljestikus funktsiooni y = f(x) graafik ja sirge y = -2.

d) Leia x väärtused, mille korral funktsiooni y = f(x) graafik astseb sirgest y = -2 allpool. ***V:*** $\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$, -2, $x\in\left(\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}\right)$.

21) . *Riigieksam 2003(15p.)*Antud on funktsioon $y=x^3-3x$

a) Leidke funktsiooni nullkohad.

b) Leidke funktsiooni tuletis.

c) Leidke funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

d) Leidke funktsiooni graafiku maksimum- ja miinimumpunkti koordinaadid.

e) Joonestage funktsiooni $y=x^3-3x$ graafik.

f) Kirjutage välja antud funktsiooni positiivsuspiirkond.

V: $X^o=\{0;-\sqrt{3};\sqrt{3}\}; y'=3x^2-3; X_1\uparrow=\left]-\infty;-1\right[, X_2\uparrow=\left]1;\infty\right[, X\downarrow=\left]-1;1\right[;$
$P_{\max}(-1;2), P_{\min}(1;-2); X^+=\left]-\sqrt{3};0\right[\cup\left]\sqrt{3};\infty\right[.$

22) *Riigieksam 2003(20p.)*On antud funktsioonid $f(x)=x^2+bx\,(b>0)$ ja $g(x)=8\cdot 2^x+2^{-x}-9$.

1. Joonestage *x*-teljega ja joonega *y* = *f*(*x*) piiratud kujund ning selle sisse täisnurkne kolmnurk, mille üks tipp on koordinaatide alguses, üks kaatet *x*-teljel ja selle vastastipp joonel *y* = *f*(*x*).
2. Leidke selle kolmnurga maksimaalne võimalik pindala.
3. Leidke funktsiooni *g*(*x*) nullkohad.
4. Määrake arv *b* nii, et funktsiooni *f*(*x*) nullkohad ühtiksid *g*(*x*) nullkohtadega.

5. Arvutage saadud b väärtusel punktis 1) leitud kolmnurga pindala.

V: $S = \frac{2b^3}{27}; x_1 = 0, x_2 = -3; b = 3;$ 2 $üh^2$.

23) *Riigieksam 2004(15p.)*On antud funktsioon $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$

a) Leidke funktsiooni tuletis.
b) Leidke funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud.
c) Arvutage funktsiooni maksimum- ja miinimumpunkti koordinaadid.
d) Joonestage funktsiooni $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$ graafik.
e) Koostage võrrand joone $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$ puutujale punktis (2; 6).

V: $y' = 6x^2 - 6x; X_1 \uparrow =]-\infty; 0[, X_2 \uparrow =]1; \infty[, X \downarrow =]0; 1[; P_{max}(0;2), P_{min}(1;1); y = 12x - 18.$

24) *Riigieksam 2004(20p.)*Antud on funktsioonid $f(x) = \ln x$ ja $g(x) = -\ln x$.

a) Lahendage võrrand $f(x) = g(9x)$.
b) Leidke puutuja võrrand joonele $y = f(x)$ punktis, mille x-koordinaat on e, ja joonele $y = g(x)$ punktis, mille x-koordinaat on $\frac{1}{e}$.
c) Tõestage, et leitud puutujad on teineteisega risti.
d) Joonestage kolmnurk, mille moodustavad leitud puutujad ja sirge $y = 1$. Arvutage selle kolmnurga pikima külje pikkus ja pindala.

V: $x = \frac{1}{3}; y = \frac{1}{e}x, y = -ex + 2;$ *külje pikkus* $\frac{e^2 - 1}{e}; S = \frac{(e^2 - 1)^2}{2e(1 + e^2)} \approx 0{,}895$ $üh^2$.

25) *Riigieksam 2005(10p.)* Antud on funktsioonid $y = x^3 - 4x$ ja $y = x^2 - 1$

a) Arvutage funktsiooni $y = x^3 - 4x$ nullkohad ja maksimum- ning miinimumpunkti koordinaadid.
b) Joonestage funktsioonide $y = x^3 - 4x$ ja $y = x^2 - 1$ graafikud samas teljestikus.
c) Kirjutage välja vahemik, kus funktsioonid $y = x^3 - 4x$ ja $y = x^2 - 1$ kasvavad üheaegselt. V: $X^o = \{-2; 0; 2\}; P_{max}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; \frac{16\sqrt{3}}{9}\right), P_{min}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -\frac{16\sqrt{3}}{9}\right); \left]\frac{2\sqrt{3}}{3}; \infty\right[.$

26) *Riigieksam 2005(15p.)* Antud on funktsioon $f(x) = -\ln\frac{1}{x}$.

a) Leidke funktsiooni määramispiirkond, lihtsustage funktsiooni avaldist.
b) Koostage funktsiooni $y = f(x)$ graafiku puutuja võrrand punktis, mille abstsiss on 1.
c) Määrake ruutfunktsiooni $g(x) = ax^2 + c$ avaldises kordajate a ja c väärtused tingimusel, et alajaotuses b) leitud puutuja oleks ühtlasi ka funktsiooni $y = g(x)$ graafiku puutujaks punktis, mille abstsiss on 1.
d) Joonestage samas teljestikus funktsioonide $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ graafikud ning nende graafikute ühine puutuja.

$X =]0; \infty[y = \ln x; y = x - 1; a = 0{,}5, c = -0{,}5.$

27) *Riigieksam 2006(10p.)* Antud on funktsioonid $y = \frac{1}{3}x^3 - x$ ja $g(x) = -x + 1$.

a) Leidke funktsiooni $y = f(x)$ nullkohad ning maksimum ja miinimum.
b) Skitseerige ühes ja samas koordinaatteljestikus funktsioonide $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ graafikud lõigul [–3; 3].
c) Kirjutage joonise põhjal välja antud funktsioonide ühine kahanemisvahemik.

V: $X^o=\{-\sqrt{3};0;\sqrt{3}\}, y_{\max}=\frac{2}{3}, y_{\min}=-\frac{2}{3}; X\downarrow=]-1;1[.$

28) *Riigieksam 2006(15p.)* On antud funktsioonid $y = f(x)$ ja $y = g(x)$, kus $f(x) = \ln(4x)$ ja $g(x) = -\ln x$.

1. Arvutage antud funktsioonide graafikute lõikepunkti koordinaadid.
2. Avaldage $f(x)$ summana.
3. Koostage võrrand kummagi funktsiooni graafiku puutujale graafikute lõikepunktis.
4. Joonestage ühes ja samas teljestikus mõlema funktsiooni graafikud ning punktis 3) leitud puutujad.

V: $L\left(\frac{1}{2};\ln 2\right); f(x)=\ln 4+\ln x; y=2x+\ln\frac{2}{e}, y=-2x+\ln 2e.$

29) *Riigieksam 2007(10p.)* Antud on funktsioon $y=x^3-5x^2+3x+7$.

a) Leidke funktsiooni kasvamis- ja kahanemisvahemikud.

b) Arvutage funktsiooni vähim väärtus lõigul $[-2;4]$.

V: $X_1\uparrow=\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[, X_2\uparrow=]3;\infty[, X\downarrow=\left]\frac{1}{3};3\right[; y=-27.$

30) *Riigieksam 2007(15p.)* On antud joon $y=x\ln x+2x$

a) Leidke sellel joonel punkt $P(x; y)$, mille koordinaatide summa on vähim.

b) Leidke arv a, mille korral sirge $y = ax - 2$ on antud joone puutujaks.

c) Arvutage vastava puutepunkti koordinaadid.

V: $P\left(\frac{1}{e^4};-\frac{2}{e^4}\right); a=\ln 2+3; P(2;2(\ln 2+2)).$

31) *Riigieksam 2007(20p.)* Kuupfunktsiooni $y=ax^3+bx^2+cx+1$ kohta on teada, et tema graafiku puutujate seas on ainult üks selline puutuja, mille tõus on 4, ja selle puutepunkti abstsiss on $x=-\frac{1}{3}$. Veel on teada, et sellel kuupfunktsioonil on ekstreemum kohal x =-1. Määrake kordajad a, b ja c.

V: $a=-3, b=-3, c=3.$

32) *Riigieksam 2008(10p.)* On antud funktsioon $y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}$

a) Leidke funktsiooni nullkohad ja negatiivsuspiirkond.

b) Leidke funktsiooni graafiku maksimum- ja miinimumpunkt.

c) Skitseerige funktsiooni graafik lõigul [− 2; 3].

V: $X^o=\{0;1,5\}, X^-=]-\infty;0[\cup]0;1,5[; P_{\max}(0;0), P_{\min}\left(1;-\frac{1}{6}\right).$

33) *Riigieksam 2008(20p.)* Antud on funktsioon $f(x)=x^2-8\ln x+a$.

a) Leidke funktsiooni määramispiirkond.

b) Koostage antud funktsiooni $y = f(x)$ graafikule puutuja võrrand punktis, kus see lõikub joonega $y=x^2+a$

c) Milliste a väärtuste korral on funktsioon $f(x)=x^2-8\ln x+a$ kogu oma määramispiirkonnas positiivne?

V: $X=]0;\infty[; y=-6x+7+a; a>8\ln 2-4.$

34) *Riigieksam 2009(10p.)* On antud funktsioon $f(x) = (x^2 - 4)(2x - 1)$. Leidke selle funktsiooni

a) nullkohad;

b) negatiivsuspiirkond;

c) tuletis;

d) maksimumpunkti koordinaadid.

V: $X_o = \{-2;0,5;2\}; X^- =]-\infty;-2[\cup]0,5;2[; f'(x) = 6x^2 - 2x - 8; P_{\max}(-1;9).$

35) *Riigieksam 2010(10p.)* On antud funktsioon $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 7$.

a) Näidake, et $f(-2) > f(3)$.

b) Leidke funktsiooni $f(x)$ tuletis.

c) Leidke funktsiooni $f(x)$ kasvamisvahemik ja arvutage ekstreemumpunktide koordinaadid.

d) Joonestage eespool saadud tulemusi kasutades funktsiooni $f(x)$ graafik lõigul $[-2;\ 3]$.

V: $f(-2) = 13 > f(3) = -7; f'(x) = -3x^2 + 6x; X\uparrow =]0;2[; P_{\min}(0;-7), P_{\max}(2;-3).$

36) *Riigieksam 2010(20p.)*

1. On antud funktsioon $f(x) = ax^2 + b\ln x + c$, kus a, b ja c on reaalarvud. Leidke kordajate a, b ja c väärtused nii, et funktsiooni $f(x)$ graafik läbib punkti $P(1;\ 3)$ ning graafiku puutujaks selles punktis on sirge $y = 4x + a$. Kontrollige saadud tulemusi.
2. Leidke funktsiooni $g(x) = 4 + 6\ln x - x2$ suurim ja vähim väärtus lõigul $[1;\ e]$.

   V: $a = -1, b = 6, c = 4; y_{\max} = 1 + 3\ln 3, y_{\min} = 10 - e^2.$

37) *Riigieksam 2011(10p.)* On antud funktsioon $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 5$

1) Arvuta funktsiooni f(x) ekstreemumpunktide koordinaadid ja määra nende liik.
2) Leia funktsiooni f(x) kasvamisvahemikud.
3) Joonesta funktsiooni graafik lõigul [-1; 3].

V: $A_{\min}(0;-5), B_{\min}(2;-5), C_{\max}(1;-4); X_1\uparrow =]0;1[, X_2\uparrow =]2;\infty[.$

38) *Riigieksam 2011(20p.)*

On antud funktsioonid f(x) = $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 + x - 3)$ ja g(x) =a ln$x$ – b, kus $a \in R;\ b \in R$ ja

h(x) = $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3}x + 1\right) - 1$.

1.Arvuta a) $3^{f(3)}$;

2. Lahenda võrrand f(x) = h(x).

3. Kas leidub parameetri p ($p \in R$) väärtus nii, et võrrandil f(x) = f(p) on ainult üks lahend? Põhjenda vastust.

4. Määra a ja b väärtused nii, et funktsiooni g(x) graafik läbib punkti A(1; e) ning selle puutuja kohal x = 2 on risti sirgega y = -(2 + x). Koosta puutuja võrrand.

V: $\frac{1}{9}; x = 3; leidub,\ p = -0,5; a = 2, b = -e; y = x - 2 + \ln 4 + e.$

39) *Riigieksam 2012(10p.)* On antud funktsioon f (x) = $x^4 - 9x^2$.

a) Leia funktsiooni f(x) nullkohad.

b) Kas funktsioonf(x) on paaris- või paaritu funktsioon? Põhjenda.

c) Leia funktsiooni f(x) maksimumpunkti koordinaadid.

d) Leia funktsiooni f(x) graafiku puutuja tõus kohal x_o=3.

V: $X_o = \{-3;0;3\};$ *paarisfunktsioon*; $P_{\max}(0;0); k = 54.$

40) *Riigieksam 2012(20p.)* On antud funktsioon f (x) = 2^x.

a) Leia funktsiooni f(x) pöördfunktsioon.

b) Joonesta ühes koordinaatteljestikus funktsiooni f(x) ja tema pöördfunktsiooni graafikud.

c) Näita, et $\frac{f(x)-10}{f(x+1)} = 0{,}5 - 5 \cdot 2^{-x}$.

d) Lahenda võrrand $8 \cdot f(x) - \left(4^{-x}\right)^{-0{,}5} = 3{,}5$.

V: $y = \log_2 x; x = -1$.

41) *Riigieksam 2013(10p.)* On antud funktsioon $f(x) = x^2\left(\frac{1}{3}x + 2\right)$. Leia selle funktsiooni

a) positiivsuspiirkond;

b) graafiku ekstreemumpunktide koordinaadid ja määra nende liik;

c) kahanemisvahemik.